image
not
available







ENTRETIENS

OU

LEÇONS MATHEMATIQUES

Sur la maniere d'étudier cette SCIENCE, & sur ses principales utilités;

Avec les

ELEMENS D'ARITHMETIQUE

& D'ALGEBRE, rangés dans un nouvel ordre, & démontrés sans calcul littéral.

PAR

BENJAMIN PANCHAUD.

PREMIERE PARTIE.



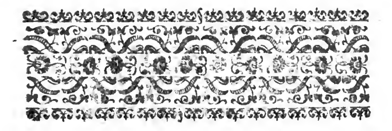


A LAUSANNE & à GENEVE,

Chez MARC-MICH. BOUSQUET & Comp.

MDCCXLIII.





PREFACE.

Le petit Ouvrage que je donne ici au Public, aura dequoi le ſurprendre par le titre même qu'il porte. Des ENTRETIENS MATHEMATIQUES démontrés ſans calcul littéral & rangés dans un meilleur ordre, ſont une production aſsés rare dans le Siècle où nous vivons, & à préſent que tant de perſonnes ont perfectionné cette Science d'une maniére ſi glorieuſe pour eux, & ſi utile pour la poſterité.

On ne tardera point à s'appercevoir en ne faiſant même que de parcourir quelques pages de ce Livre, de la ſingularité de ces Entre-

tiens tels que l'on n'en vit jamais, où il y a deux perſonnages dont l'un parle preſque toujours & donne viſiblement des Leçons. C'eſt à quoi j'ai remedié en partie dans le titre, *Entretiens ou Leçons Mathématiques*. Si cela ne ſufit pas, l'aveu que je fais ici rendra, peut-être, cette faute plus excuſable. Enfin je conviendrai ſans peine que je ne voudrois pas ſoutenir ſur ce ſujet une diſpute de quelques heures; de ſorte que je n'aurois pas manqué d'y apporter une correction poſitive, ſi la choſe m'avoit paru être de quelque conſéquence.

Je promets enſuite des *Elemens d'Algébre & d'Arithmétique:* cela n'empêche pas que je n'aie omis bien des choſes qui portent ordinairement ce nom, & il y en a d'autres que je ne fais à peine qu'indiquer. Mais puiſque tous ne conviennent pas également de ce qui mé-

mérite le nom de Propoſition Elémentaire dans les Mathématiques, on me permettra bien ſans doute d'avoir auſſi mon ſentiment particulier, & d'enviſager à ma façon, ce que je crois devoir ſervir d'entrée à ceux dont le deſſein eſt de ſe vouër aux Mathématiques, auſſi bien qu'à d'autres qui veulent ſeulement prendre quelque teinture de cette Science.

Je dis encore que ces ELEMENS ſont *démontrés ſans calcul littéral*; ce qui n'a pourtant pas lieu dans quelques Propoſitions; mais cela doit s'entendre de la plus grande partie; car il ne ſera pas difficile de ſe convaincre du but que je m'y ſuis propoſé. On auroit donc tort, ce me ſemble, de vouloir prendre ces termes dans un ſens trop exact; & d'ailleurs ce que le Public perdra pour s'être trompé à ce ſujet, en ſuppoſant même que tous ſoient

dans cette erreur, ne sera qu'un changement d'idées, & une maniére de penser autrement, qui ne pourra faire du tort à qui que ce soit. Enfin ce sont des ELEMENS *rangés dans un nouvel ordre*; cela est si vrai que je ne sache pas que l'on ait encore suivi cette méthode: du moins elle sera toujours nouvelle, c'est-à-dire peu usitée, j'ose l'assurer: Si elle est la meilleure, c'est ce que j'abandonne entierement à la décision de ceux qui s'y entendent mieux que moi. Voilà en peu de mots les principales remarques que j'avois à faire sur le titre de cet OUVRAGE.

On trouvera dans quelques endroits, certains traits un peu hardis contre les Mathématiciens au sujet des *Infiniment petits*: sur cela je prie le Lecteur de ne pas croire que j'aie voulu par là rejetter absolument & sans aucune reserve ce que plusieurs

Grands Hommes ont écrit ſur ces ſortes de matières: mais il n'en eſt pas moins vrai que l'on a pour l'ordinaire des notions très fauſſes de l'infini, & qu'il faut bien prendre garde de quelle manière on en parle. D'ailleurs j'ai changé d'idées depuis fort peu de tems, en m'éloignant, peut-être, encore plus de celles de la multitude. Cependant je n'ai encore, à proprement parler, embraſſé aucun Syſtême, juſques-à-ce que j'aie examiné moi-même & donné à examiner aux autres les diverſes raiſons que je puis avoir pour douter du ſentiment le plus commun à ce ſujet.

Cet Ouvrage n'avoit pas d'abord été entrepris pour être donné au Public. Ce n'eſt pourtant pas à la ſollicitation de mes Amis que je m'y ſuis déterminé: que ce ſoit un principe de vanité ou quelque bon motif qui m'ait porté à cela, c'eſt

ce dont le Public ne sauroit décider; & de plus, refusant avec justice de m'en croire sur ma parole, il est plus naturel que d'un côté je me taise sur cet article, & que de l'autre, les Connoisseurs en portent un jugement équitable, en décidant non des raisons qui ont pu me porter à cette entreprise, mais de ce qu'il est effectivement. C'est là mon prémier coup d'essai, je ne doute pas que l'on ne s'en apperçoive en bien des endroits; & si j'osois assurer qu'il y a quelque chose de bon dans mon Ouvrage, je ne laisserois pas de me taire sur la plus grande partie, en attendant avec une tranquille impatience le sort qu'il aura, & la réception qu'on lui va faire.



AVERTISSEMENT.

J'Ai cru devoir expliquer ici, en faveur des commençants, les ſignes & caractères algébriques dont je me ſuis ſervi en quelques endroits.

$+$ veut dire *plus*. $a+b$ c'eſt a ajouté à b

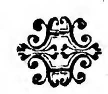
$-$, *moins*. $a-b$ c'eſt a diminué de b.

$\times$ eſt le ſigne de la Multiplication $a\times b = ab$ ou a multiplié par b. Les proportions Arithmétiques s'expriment ainſi $ab \cdot\!\cdot\!\cdot\; c.\; d.$ ou $a-b = c-d$. Les Géometriques, $a.\, b :: c.\, d$, ou $a:b = c:d$. Les progreſſions Arithmétiques, $\div a, b, c, d$, comme on le verra en ſon lieu. Les Géométriques $\div\!\div a.\, b.\, c.\, d$ &c.

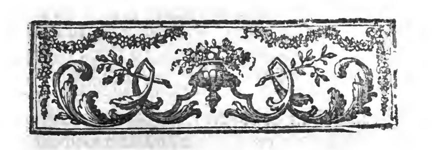
x^2 veut dire xx, c'eſt-à-dire, x multiplié par lui-même.

x^4 eſt la quatriéme Puiſſance, & ainſi

ainsi des autres. $\sqrt{}$ est le signe radical. $\sqrt{a}$, c'est le nombre ou la quantité qui est telle, que si on la multiplie par elle-même, on aura la grandeur a. $\sqrt[3]{}$ c'est la racine cubique. $\sqrt[4]{a^n}$ racine quatriéme de a élevée à un nombre indéterminé de puissances qui s'exprime par ^{n}.



ENTRE-



ENTRETIENS MATHEMATIQUES.

ENTRETIEN I.

MATHESIUS ET NEANDER.



Ous m'avés prié plus d'une fois, de vous donner quelques instructions sur les Mathématiques, & d'en faire l'objet de nos conversations journalières; j'accepte avec plaisir cette proposition, & je ne suis plus en peine, que de m'en bien acquitter. Nous commencerions même dès-aujourd'hui, si vous le trouviés bon; mais je crois qu'avant d'entrer en matière, il conviendroit de préparer votre esprit par quelques leçons sur l'utilité des Mathématiques, sur la manière de les apprendre, & les diverses précautions avec lesquelles on

doit ſe conduire dans cette Etude, pour en tirer les fruits & les avantages, qu'elle procure infailliblement à ceux qui ont réuſſi dans cette ſcience.

NEANDER. Je vous ſuis très obligé de cette complaiſance, & je ne négligerai pas non plus de mon côté les occaſions de vous en témoigner ma juſte reconnoiſſance, par tous les bons ſervices que je ſerai en état de vous rendre.

MATHESIUS. Mon deſſein n'eſt pas de me faire de tout ceci, un mérite auprès de vous. Vous devés ſavoir que ces ſortes de matières ne peuvent jamais être repaſſées aſſés ſouvent; qu'en enſeignant, on apprend une choſe incomparablement mieux que par tout autre moien, & qu'enfin le ſujet en lui même eſt ſi intéreſſant & ſi curieux, que l'on trouve toujours un plaiſir nouveau à y revenir: quand on ne fait que cela pour un intime ami, il me paroit que ce n'eſt pas l'aſtreindre à de grandes obligations.

NEANDER. Quoiqu'il en ſoit, autant que votre modeſtie s'efforce à rabbaiſſer le prix de vôtre action, autant cette même modeſtie, dont la ſincerité m'eſt ſi parfaitement connue, ſert à en re-

relever l'éclat, & à vous faire toujours mieux regarder comme un fidèle & généreux Ami.

MATHESIUS. En voilà assés, je pense, pour les compliments, ou plûtôt nous nous connoissons trop bien l'un & l'autre, pour avoir besoin de marques extérieures d'amitié & de bienveillance reciproques. C'est pourquoi je vous prie d'y mettre fin, & si vous le voulés, pour faire trêve de politesse, nous viendrons dès à present même à ce qui est en question.

NEANDER. Finissons donc, puis que vous le voulés ainsi, je suis prèt à vous écouter.

MATHESIUS. Je sai que vous avés fait un Cours de Logique assés bon, & un très mauvais d'Arithmetique ou d'Algèbre : tout cela pourtant ne sera pas entiérement inutile ; il importe même assés d'avoir une connoissance, au moins médiocre, de la Logique pour entreprendre les Mathématiques: & quand à cette course, car je ne l'appellerai pas autrement, que vous avés faite dans une partie de l'Algèbre; elle vous aura au moins donné quelque idée de cette Science, & des principales choses qu'on

y traite : vous aurés bien encore retenu quelques noms par ci par là, qui pourront servir au besoin. Cela étant, je vais commencer par des remarques Logiques, qui serviront comme de fondement à ce que je dois établir dans la suite.

La prémière chose qu'il importe de savoir ici, c'est que les Mathématiques sont une Science. Il faut par conséquent s'attacher à vous donner de ce terme, une idée juste & précise.

NEANDER. Je sai que l'on definit ordinairement *la science* par *l'habitude de démontrer & de rendre raison des choses*; de là vient, je pense, que les Anciens distinguoient si fort entre SCIRE & OPINARI, disants, que le prémier de ces termes marque une connoissance certaine & évidente; au lieu que le second la reduit à une probabilité plus ou moins grande & à la seule vraisemblance.

MATHESIUS. Cela est vrai: mais ces sortes de definitions n'ont pas dans l'usage commun, un sens bien déterminé; & à present le terme de science s'applique à des sujets dont la connoissance est douteuse à bien des égards; telles

telles ſont, par exemple, la Metaphyſique, la Phyſique, la Morale, l'Hiſtoire &c. Cependant cela ne doit pas vous faire de la peine, car il ſufit de ſavoir en quel ſens il faut prendre le terme de Science, appliqué à un objet déterminé; comme quand il s'agit des Mathématiques, il eſt bien ſûr qu'il faudra l'entendre dans le ſens le plus abſolu, & qu'on doit enviſager les Mathématiques, comme *un ſyſtème de vérités démontrées & entierement certaines*, ce qui revient préciſément à la definition que vous venés d'en donner. Mais pourriés-vous me dire ce qu'il faut entendre par *Démontrer?*

NEANDER. Je crois que Démontrer, c'eſt *faire voir la vérité d'une choſe, d'une manière ſi claire & ſi convaincante qu'on ne puiſſe pas la revoquer en doute.*

MATHESIUS. Votre definition ne renferme rien qui ne ſoit très véritable: cependant j'aimerois mieux me ſervir de celle-ci qui me paroit plus exacte. C'eſt *faire voir la vérité d'une choſe d'une manière ſi claire, qu'on s'apperçoive évidemment que le contraire implique contradiction.* Vous en comprendrés mieux la raiſon dans la ſuite. Mais il convient de re-

prendre la chose de plus haut, pour ne rien laisser sans une suffisante explication, & je commence par vous faire la question la plus simple, qui soit possible ; C'est celle ci : vous appercevés-vous de vôtre Existence ?

NEANDER. Très assurément ; & je n'ai pas même la moindre envie d'en douter.

MATHESIUS. Ne sentés-vous quoi que ce soit que vôtre propre existence ; c'est-à-dire, ne vous appercevés-vous uniquement que de ceci ; c'est que vous êtes quelque chose ?

NEANDER. Je sai que j'éprouve diverses sensations, que je pense, que je réfléchis, & que j'ai l'idée d'un grand nombre de choses.

MATHESIUS. C'est-à-dire, que vous appellés, *Penser*, avoir des représentations de choses qui ne sont pas *Vous*, & qui ne vous ressemblent pour la plûpart en aucune façon.

NEANDER. Sans doute ; & c'est aussi à ces représentations, que je donne le nom d'idées.

MATHESIUS. Vous sentés donc bien, que vos idées vous représentent des choses, qui ne peuvent pas être Vous, quoi-

quoique vous ne soiés pas convaincu par là même, que ces choses existent réellement au déhors de vous, & ayent une réalité differente de celle de votre substance pensante. Il seroit pourtant ridicule & même extravagant de croire, que la perception du feu ou du fer, par exemple, ou de quelque autre objet semblable, fut de la même nature, que ce que vous vous représentés, lorsque vous les concevés. Vous savés de plus, que toutes vos perceptions ne sont pas représentatives de quelque objet, dont l'existence, si elle est actuelle, ne peut qu'être differente de la votre, mais que vous éprouvés très souvent, pour ne pas dire toujours, certaines perceptions qui ne vous représentent quoi que ce soit, que vôtre propre état actuel, & vôtre manière d'exister. On les appelle *Sensations*. On les distingue en exterieures & interieures ou *Passions*. On fait de même plusieurs distinctions sur les idées; perceptions des sens, de l'imagination, de l'entendement, de la mémoire &c. comme l'experience nous l'apprend, & telles que vous les avés vûes dans votre Logique. Nous connoissons aussi, avec une entière cer-

titude, que nos idées ne ſont pas parfaitement ſimples, mais qu'elles repréſentent preſque toujours pluſieurs choſe en même tems, ou du moins nous ſerions fort embarraſſés de donner des exemples d'idées, qui fuſſent tout à fait exemptes de compoſition. On appelle donc très ſouvent idée un *aſſemblage de repréſentations*, & celles-ci ſont encore compoſées d'autres. Mais c'eſt le défaut d'attention qui nous empêche de ſentir le plus ſouvent cette compoſition. Nous avons encore le pouvoir d'aſſembler ces idées, de les ſeparer, de les exciter, de les faire naître, au moins juſqu'à un certain point & en un grand nombre d'occaſions. Enfin nous ſommes capables d'attention, c'eſt-à-dire, ſi je puis parler ainſi, nous avons la puiſſance de raſſembler les forces de notre eſprit ſur un petit nombre d'idées, pour les comparer entr'elles, & pour ſentir, ſi elles doivent être unies ou ſeparées les unes des autres.

NEANDER. Tout cela eſt indubitable; & une experience intérieure, m'en convainc autant que je le ſuis de ma propre exiſtence.

MATHESIUS. Je remarque de plus en

en général, que nous avons une certaine perception vive & immediate, ou un ſentiment qui nous force à reconnoitre que nos idées ſont unies ou ſéparées entr'elles; car nous avons un grand nombre d'idées toutes différentes, que nous venons à bout de comparer par le moien de l'attention, c'eſt-à-dire, de les ſentir en même tems: & l'évidence nous fait voir de quelle façon nous devons regarder ces idées, ſi l'une contient ou exclut l'autre d'une manière néceſſaire ou contingente; or ces idées ſont, comme vous le ſavés, vagues, ou déterminées; partiales, ou totales; claires, ou obſcures; diſtinctes, ou confuſes.

NEANDER. Vous avés appellé *Objet*, ce que les idées repréſentent; mais pouvons-nous nous aſſurer qu'il y en ait effectivement au déhors de nous?

MATHESIUS. Pour répondre à cela, je remarque d'abord que la certitude n'étant autre choſe que cet état de notre ame, qui conçoit liées (ou les ſuppoſe telles) certaines idées ſur un même ſujet, dès qu'on la prend dans ce ſens là, elle peut avoir pour objet des choſe douteuſes & même entierement fauſ-

ses. Dans le cas donc que vous me proposés, il est de fait, que l'idée d'un objet & l'idée de la réalité de cet objet, n'ont pas entr'elles une liaison nécessaire; tout au plus, on n'y sent aucune opposition. Cependant personne ne doute sérieusement qu'il n'y ait au déhors de soi, des Corps, des Esprits &c. Et à cet égard bien des gens n'attendent pas pour s'assurer de cela qu'ils aient raison de l'être, ils supposent avant que de concevoir, & donnent par là même leur assentiment, à des choses qu'ils n'ont point encore suffisamment examinées. Mais dans les Mathématiques, il n'est pas besoin de la persuasion de l'existence des objets exterieurs, pour s'assûrer des vérités que l'on y traite, ou du moins l'on pourroit s'en passer, n'y aiant pour ce sujet qu'à consulter ses propres idées & son Entendement.

NEANDER. Et quel fond voulés-vous, que nous fassions sur ces idées, puisque nous ne savons, ni ce qu'elles sont, ni ce qu'est la substance de nôtre Ame, qui en est le Principe & la source?

MATHESIUS. Il est vrai que nous

ne

ne nous connoissons pas nous-mêmes, aussi bien que nous le souhaitterions. Mais cela n'empêche pas que nous n'aions dans nous, un fondement légitime & convenable de persuasion dans cette évidence qui nous éclaire, qui nous force à acquiescer aux vérités qu'elle nous propose, qui nous les présente constamment & invariablement de la même manière. D'ailleurs ce que nous ne connoissons pas de nôtre ame, ne doit pas nous empêcher de sentir & de croire ce qui nous est très parfaitement connu.

NEANDER. Cela est bien vrai; & nous avons même une règle de Logique sur ce sujet, dont je reconnois ici l'importance, c'est que *les choses que nous ne connoissons pas, ne doivent point ébranler la certitude de celles que nous connoissons clairement.*

MATHESIUS. Il n'y auroit rien de plus déraisonnable que d'en agir autrement. Mais, pour en revenir à nos idées, je ne m'arrêterai pas à vous expliquer toutes ces distinctions que vous devés savoir, sur tout, celles qui regardent les idées considérées en elles mêmes. Je dirai seulement quelque chose, sur ce qui concerne la manière de les comparer.

Voici donc ce que l'experience nous apprend encore à ce ſujet ; c'eſt que, quand on ſe rend attentif ſur deux idées, par exemple, & que l'on raſſemble ſur elles, pour ainſi dire, toutes les forces de ſon eſprit, afin de les conſiderer & de les ſentir, en même tems, il reſulte, pour l'ordinaire de la comparaiſon que l'on en fait, une perception claire & évidente, ſur la liaiſon ou ſur l'oppoſition néceſſaire ou contingente de ces deux idées. D'autres fois, par contre, il arrive que ces idées, pour n'être pas aſſés familières, aſſés claires, ou aſſés diſtinctes, ne peuvent pas être comparées de cette manière, ſur tout quand l'attention ne s'y applique pas avec aſſés de force : dans ce cas là, l'evidence ne nous avertit pas des jugemens que nous devons porter ſur de telles idées, ou bien ce ſentiment, plus ou moins foible, nous doit auſſi déterminer plus ou moins fortement, à prendre le parti de la ſuſpenſion & du doute. Or quand deux idées doivent être néceſſairement unies ou ſeparées l'une de l'autre, & que l'évidence nous fait remarquer une liaiſon ou une oppoſition néceſſaire entr'elles ;

nous

nous disons que l'on peut démontrer la proposition dont les deux termes expriment les idées que l'on vient de supposer telles. Au contraire, quand nous voions, que ces deux idées doivent être unies entr'elles, quoique d'ailleurs nous sentions qu'il se pourroit qu'elles ne le fussent pas, & reciproquement que nous les voions séparées, quand elles pourroient être unies; dans ce cas, la proposition est probable, elle a de la vrai-semblance, mais elle ne peut pas être démontrée, elle laisse encore lieu à des doutes, *à des peut-êtres*, à des incertitudes. Ces propositions sont plus ou moins probables les unes que les autres, suivant que ces idées sont plus ou moins souvent unies entr'elles, suivant le nombre des raisons qui peuvent rendre cette union possible; suivant qu'il en est moins qui puissent la rendre nulle; & enfin suivant les diverses propositions, qui sont déja reconnues comme certaines, & qui ont plus ou moins de rapport avec celle dont il s'agit. Il est donc clair que les Démonstrations surpassent en force les simples preuves, qu'elles excluent toutes les objections possibles, & que l'on ne sauroit leur oppo-

opposer quoique ce soit de raisonnable. En effet, on ne peut rien demander de plus, que de faire voir évidemment que deux idées sont unies entr'elles, d'une telle manière qu'il implique contradiction qu'elle ne le soient pas.

Quand on veut prouver une proposition, les deux idées qui la composent, étant comparées exactement l'une avec l'autre, se font sentir en même tems avec leurs relations, & l'esprit s'apperçoit aussi-tôt s'il doit les unir ou les séparer, sur tout dans les propositions qui peuvent être démontrées, & qui sont susceptibles de ce genre de preuves: ou bien ces idées n'étant pas assés complettes ou claires, ou distinctes, ou tout cela en même temps, ont besoin d'une idée moienne qui contienne nécessairement l'attribut, & qui soit contenue de même dans le sujet. Or cette idée moienne, il faut qu'en la comparant avec les deux termes de la proposition, on s'apperçoive d'abord du rapport qu'elle a avec eux, ou se servir encore d'une seconde idée moienne, jusqu'à-ce qu'on en trouve une, qui soit telle qu'on vient de le dire; car s'il étoit toujours besoin de nouvelles idées moiennes, il est clair que

cela

cela iroit à l'infini & que par conséquent on ne pourroit s'assurer de la vérité d'aucune proposition. Suivant cela, on distingue les propositions *en Propositions évidentes par elles-même*, & *en Propositions qui ont besoin de preuves*. Les prémières sont de trois sortes; savoir *les Definitions*, *les Suppositions*, & *les Axiomes*. Les definitions sont des *propositions qui expliquent la signification d'un mot*, *en marquant l'idée qu'on y attache*, & cette idée doit être si bien caractèrisée qu'on ne puisse pas unir ce mot, sans s'en appercevoir, à quelqu'autre idée que ce soit. Or les signes, les mots & les caractères, idées de l'imagination, sont contingentes avec celles de l'entendement, & n'ont avec elles qu'un rapport tout à fait arbitraire. Ainsi une proposition dont le sujet est un mot, & l'attribut une idée, n'a pas besoin de preuve, puisque l'on sent évidemment la possibilité d'unir une idée vocabulaire à une idée intellectuelle quelque qu'elle soit, pourvû qu'on ne suppose rien au de-là de ce qu'on voit effectivement. Les suppositions ou *demandes* n'ont pas besoin non plus de preuves; car elles ne sont autre chose que, *des*

assem-

assemblages d'idées qu'on a choisies & qui peuvent être unies entr'elles. Il n'y a donc qu'à sentir cette possibilité, & à se rendre attentif sur la nécessité des consequences qu'on peut en tirer naturellement.

NEANDER. Je voudrois que vous me donnassiés un exemple de ces Suppositions.

MATHESIUS. Rien n'est plus aisé: ainsi je dirai, *un nombre peut être ajouté à un autre nombre.* Si je compare les idées de deux nombres, comme d'abord séparés l'un de l'autre, & l'idée d'addition avec celles là, je sentirai que l'idée de possibilité s'unit avec celle d'addition & avec celle de deux nombres; d'où je conclus que deux nombres peuvent être ajoûtés l'un à l'autre. Il est d'autres suppositions, quoi que fort rares, où l'on fait plus attention à la nécessité de la consequence, qu'à la vérité du Principe, & même quelques fois, on la tire d'un Principe que l'on fait être faux : comme si je disois, *si 4 est moitié de 6, 8 est moitié de 12.* Or il est faux que 4 soit moitié de 6, il est faux que 8 soit moitié de 12; mais la consequence a lieu nécessairement, en supposant la vérité du Principe.

NEAN-

NEANDER. Que dirés-vous enfin des Axiomes ?

MATHESIUS. Ce terme se prend en divers sens, mais toujours il signifie une proposition qui n'a pas besoin de preuve. A certains égards les Axiomes ne different pas beaucoup des Suppositions, il faut seulement remarquer en peu de mots. 1°. Que les Axiomes sont toujours des vérités positives, claires & évidentes, au lieu que, comme nous venons de le voir, la Supposition peut être bonne, & le Principe aussi bien que la consequence être faux. 2°. Les Axiomes sont, pour l'ordinaire, des vérités générales & universelles; mais il n'en est pas de même des Suppositions. 3°. Les Axiomes ne sont presque jamais que des vérités qui suivent de certaines suppositions; ainsi les Suppositions doivent preceder ordinairement les Axiomes: comme par exemple, quand je dis, que *des grandeurs égales ajoûtées à d'autres égales sont égales entr'elles.* Cet Axiome suppose qu'on peut ajoûter plusieurs grandeurs, ou plusieurs nombres les uns aux autres, il suppose que ces grandeurs sont égales, & autres choses semblables, d'une telle manière pourtant que jamais dans un Axio-

Axiome, le ſujet & l'attribut ne peuvent être faux. 4°. Enfin, il eſt à remarquer en général ſur les Axiomes, que la même propoſition peut être évidente pour l'un, & avoir beſoin de preuve pour l'autre. La raiſon en eſt manifeſte, & il eſt clair que cela dépend des diverſes cauſes, qui peuvent contribuer à rendre ces idées plus ou moins familières, complettes, claires ou diſtinctes: toutes les fois donc que l'on propoſe un Axiome à une perſonne, il ne s'enſuit pas qu'il doive le comprendre ſur le champ, mais il peut être arrêté 1°. par les termes de la propoſition qui ne lui ſont pas exactement connus ni aſſés familiers. 2°. Par la nature même des idées que ces termes ſignifient, & à cet égard l'embarras peut venir du préjugé, ou d'une certaine manière de concevoir, qui donne des notions fauſſes, ou du moins imparfaites du ſujet & de l'attribut. 3°. De ce qu'il ne fait pas attention à toutes les ſuppoſitions, ou, comme l'on parle dans les Ecoles, à tous les *Data* de la propoſition. 4°. Par l'inattention ou le peu de ſoin avec lequel il compare ces deux idées, ne faiſant que les entrevoir pour ainſi dire. 5°. Enfin parce qu'il peut con-

considerer ces propositions, comme renfermant plus de mystère & de difficulté, qu'il n'y en a effectivement, ou en cherchant une évidence plus grande que celle qu'on peut en avoir. Ce sont là 5 sources de difficultés qui empèchent de concevoir les Axiomes avec cette netteté, cette facilité, cette évidence, & ce plaisir que l'on semble devoir en attendre & s'en promettre naturellement.

NEANDER. Voilà donc pour les Propositions qui n'ont pas besoin de preuve. Voions ce que vous avés à dire sur les autres.

MATHESIUS. On les appelle *Theorèmes* ou *Problêmes*, suivant qu'elles se rapportent à la spéculation ou à la pratique. Les Theorèmes précèdent ordinairement les Problêmes, & se tirent des Propositions évidentes. On appelle particuliérement *Lemme* une proposition fondamentale, qui sert à en démontrer plusieurs autres. On donne le nom de *Corollaires* à ces Propositions qui suivent naturellement ou qui dépendent d'un Theorème ou d'un Problême. Les Corollaires sont de deux sortes; les uns découlent si manifestement de la Proposition précédente, que l'on est en état
de

de les comprendre & très convaincu de leur vérité, aussi-tôt que l'on a entendu la demonstration de celle là: les autres, quoi qu'ils aient un grand rapport avec la Proposition sur laquelle on les fonde, doivent être demontrés à part, si l'on veut les comprendre exactement. Je ne parlerai point de ces Propositions, qui n'étant pas susceptibles de Demonstration, ont pourtant besoin de preuves: ce n'en est pas ici le lieu. Je reviens maintenant à l'explication du terme de Science, & vous êtes à présent en état de sentir toute la justesse de cette définition. C'est *un assemblage de vérités démontrées sur un même sujet.* Il est vrai que j'aurois pû faire entrer le terme de méthode dans cette explication; mais c'est qu'en considerant une science *in abstracto* & eu égard seulement à ce qui en fait l'objet, on l'envisage independamment de l'ordre qui se trouve, ou doit se trouver, dans la manière de l'enseigner & de la traitter. Pour dire donc en deux mots ce que c'est qu'une véritable science, & de quelle manière on doit la concevoir; je remarque d'abord qu'il faut definir exactement les termes qui expriment l'objet de cette scien-

ſcience, en donner une idée juſte & préciſe; on doit y comprendre toutes les autres qui ſe rapportent à cet objet principal, entant qu'elles s'y rapportent: Dès là on paſſe à des Definitions plus particulières, aux Suppoſitions, aux Axiomes, aux Theorèmes, aux Problèmes &c. On prouve les propoſitions les unes par les autres; on s'avance ainſi, comme par degrés, du connu à ce qui ne l'étoit pas; on augmente avec ordre le nombre de ſes idées, on les examine ſeparément pour les aſſembler dans la ſuite, & cet aſſemblage on le continue auſſi longtems, & on le pouſſe auſſi loin qu'il eſt poſſible; on ne ſuppoſe quoique ce ſoit qu'on ne l'ait exactement compris; on fait de tout cela un Corps de Vérités liées & unies entr'elles avec un accord merveilleux, & ces vérités, on ſe les rend ſi familières, ſi évidentes & ſi claires, que l'Eſprit peut parcourir avec une facilité étonnante, un chemin dans lequel il s'eſt accoûtumé, & ſe retrouver ſans peine dans des routes qui lui ſont connues. C'eſt de cette manière que l'on s'y prend, pour donner un corps ſyſtématique & une ſcience traitée méthodiquement. Il s'agiroit à preſent de faire voir comment on doit étu-

étudier une ſcience; mais, ce ſera, s'il vous plait, le ſujet d'un ſecond entretien.

ENTRETIEN II.

MATHESIUS.

HE' bien comment trouvés-vous ce que nous dimes hier? Eſt-il de vôtre goût, & en avés vous bien retenu tout l'eſſentiel?

NEANDER. Je me plais fort à cette occupation là, & mon inclination me porte très volontiers à continuer ce genre d'Etude. Mais il faut que je vous diſe de quelle manière je m'y ſuis pris pour repaſſer ce que vous m'avez appris.

MATHESIUS. Je ſerai charmé de vous entendre.

NEANDER. J'ai d'abord tâché de raſſembler toutes les circonſtances qui avoient le plus de raport à ce que vous aviés dit, comme lê lieu où nous étions, le tems dans lequel nous avons commencé, le Prélude dont nous avons uſé, avant que d'entrer en matière, & autres choſes de cette nature. De plus, toutes les fois que j'ai cru ne pouvoir retrouver

ver la ſuite de vôtre diſcours, j'ai paſſé outre, me reſervant d'y revenir bientôt après. J'ai repaſſé pluſieurs fois & j'ai choiſi, pour cela, le tems le plus propre, mais principalement le ſoir & le matin : après cela, j'ai reduit le tout par écrit; Néanmoins je me propoſe de faire de nouvelles additions à mon Compends, car j'ai remarqué ſouvent que, ſans y donner une attention expreſſe, pluſieurs idées ſe reveillent & ſe préſentent en certaines occaſions avec une facilité incomparablement plus grande, que ſi on s'appliquoit tout de bon à les rappeller. Enfin à toutes ces précautions, j'ai reſolu d'ajoûter celle-ci, qui eſt d'aporter des Tablettes, pour y annoter le commencement de chaque article; de ſorte qu'avec ce ſecours, je crois que j'ometttrai très peu de choſes.

MATHESIUS. Vous vous y prenés fort bien, & il ſeroit encore bon de repaſſer avec quelqu'un de vos amis, ſi cela ſe pouvoit. Mais à défaut de cela, je vous donnerai ce conſeil, c'eſt de faire & continuer vos abregés de la même manière, pour vous accoûtumer à bien retenir tout l'eſſentiel d'une leçon; Après quoi je vous communiquerai mes Cahiers,

Cayers, fur lefquels vous pourrés examiner ce que vous aurés écrit vous-même.

NEANDER. L'avis eft excellent, & je vous ai un furcroit d'obligation dans ce nouvel expedient, dont je comprens aifément toutes les utilités.

MATHESIUS. Je vous avois promis de vous enfeigner la maniere d'étudier une fcience, auffi bien que les avantages qu'on peut en retirer; je vais maintenant m'acquiter de ma promeffe. Pour cela, je remarque d'abord qu'une fcience véritable, ne doit traiter que des idées de l'entendement; je parle au moins, des idées qui entrent, pour ainfi dire, dans le corps d'une fcience, & qui en font l'objet: car Je ne prétends pas exclure les fecours qu'on tire de l'imagination & des fens, qui font d'une néceffité abfolue dans toute forte d'Etudes. Vous devés aifément comprendre la raifon de ce que je viens de dire, auffi ne m'arrèterai-je pas à vous le prouver. Mais ce n'eft pas le tout de n'admettre que des idées intellectuelles, il eft encore de la derniere importance de ne decider de leur affemblage ou de leur feparation que fur une parfaite évidence. C'eft

C'eſt une règle qui ne ſouffre aucune exception, & qui a lieu dans tous les cas poſſibles; que les Propoſitions ſoient obſcures, claires, certaines, vraiſemblables ou autrement, il faut proportionner toujours le degré de ſon aſſentiment, au degré d'Evidence & de lumiére que l'on peut avoir, c'eſt-à-dire, quand une propoſition eſt douteuſe, il faut la regarder comme douteuſe, la regarder comme vraiſemblable, quand elle eſt vraiſemblable, & ainſi du reſte.

NEANDER. On ne ſauroit diſconvenir de la néceſſité de cette Règle, non plus que de ſon importance.

MATHESIUS. Après cela, il convient de ſe former une idée bien exacte, & d'avoir une juſte definition du terme qui indique le ſujet que l'on traite dans une Science; il en faut démêler les équivoques & prendre bien garde de ne lui attribuer ni plus ni moins d'étendue qu'on ne lui en doit donner effectivement. Cela fait, il faut choiſir un Auteur qui ait de l'ordre de, la netteté, de l'exactitude & de la precision, qui ne laiſſe pas trop à deviner, mais qui donne pourtant au lecteur le ſoin de réfléchir, & la peine de chercher lui même, ce qu'il l'aura

mis en état de trouver; un Auteur qui ne traite que de ce qui eſt eſſentiel, & qui abrège autant qu'il le peut, ſans donner pourtant atteinte aux autres qualités qui ne lui conviennent pas moins que celle que je recommande. Ces Auteurs ſont rares, je l'avoue, mais à defaut de ceux-ci, il faut tâcher de ſe procurer ceux qui en aprochent le plus.

Après s'être ainſi pourvû d'un Auteur, voions comment on doit s'y prendre pour l'étudier. C'eſt en prémier lieu, en ſe rendant bien familières les definitions par leſquelles on débute ordinairement, ou ces prémiéres idées que l'on donne du ſujet que l'on veut traiter. On ne ſauroit croire, combien ces repetitions ſont néceſſaires, il faut y revenir continuellement, & ſe les rendre même comme naturelles; car l'habitude par rapport aux idées, ſe forme par des Actes d'une attention ſouvent réiterée, & il eſt de fait qu'en aſſemblant ſouvent & de la même manière pluſieurs idées entr'elles, on acquiert une facilité toujours plus grande de former cet aſſemblage, quand on le ſouhaite; il ſufit pour cela qu'une ſeule ſe préſente, les autres l'accompagnent auſſi-tôt, l'idée

du mot rappelle l'idée de la chofe, & les idées intellectuelles fe rappellent mutuellement. Or les idées intellectuelles, idées qui font toutes univerfelles, ne fe préfentent pas fi aifément à l'efprit, parce que l'entendement eft de toutes les facultés, celle dont on fait le moins d'ufage, & que d'ailleurs fes actes n'ont ni cette vivacité, ni cette promptitude qu'ont ceux de l'imagination & des fens, qui fourniffent des repréfentations en plus grand nombre, & qui nous font beaucoup plus familières. Ces idées nous échappent donc aifément, & leur force fe trouve comme anéantie par celle des idées des fens & de l'imagination, on les perd aifément de vûe, & il n'y a qu'une habitude contraire, qui puiffe reparer cet inconvenient. De plus, nous donnons affés rarement notre attention à ce qui eft fimple; faits pour quelque chofe de grand, le compofé & le difficile paroiffent feul mériter nos recherches & nos réflexions: mais que l'on prenne bien garde que le compofé ne confiftant qu'en un certain nombre d'idées fimples combinées entr'elles, fi nous paffons trop vite d'une connoiffance à une autre, nous rifquons de tomber dans l'erreur & de

ſuppoſer ce que nous ne voions pas. Ainſi le plus ſûr, eſt de ne jamais paſſer à une troiſieme idée qu'après avoir ſenti évidemment la liaiſon des deux prémiéres; mais ce qui rend une choſe difficile à comprendre, c'eſt qu'elle ſuppoſe des idées qui ne nous ſont pas aſſés familieres, c'eſt que ces idées ſont en grand nombre, c'eſt la multitude des combinaiſons qu'il faut faire, avant que d'arriver à la concluſion que l'on avoit en vûe. Or la Règle que nous venons de donner, nous mettra en état de vaincre tous ces obſtacles & de ſe rendre aiſées des choſes même, dont la connoiſſance ſemble ſurpaſſer les forces humaines & les lumiéres de notre Eſprit.

Mais cette Règle, on ne la ſuit preſque jamais, & il n'y a rien dont on faſſe moins de cas. C'eſt la coûtume de lire les prémières pages d'un livre avec beaucoup d'atention, la nouveauté des idées l'excite chés nous ſans aucune peine, mais enſuite qu'arrive-t-il? On ne ſait pas ſe moderer dans cette lecture, la vigueur de l'attention baiſſe, & cependant on veut continuer; on eſt ſurpris du peu de progrès que l'on a fait dans l'eſpace de quelques heures, on va

plus

plus vite, on cesse d'examiner, on se contente de comprendre à moitié, les idées s'embrouillent, la confusion s'y met, on passe plusieurs articles sans preuves, & souvent on accuse l'Auteur ou de manquer d'exactitude, ou d'être obscur & de ne pas se soutenir. Quand les matières que l'on étudie, n'ont pas entr'elles une liaison parfaite, & que les vérités que l'on y traite, ne dépendent pas entierement les unes des autres, on se contente de comprendre en gros ce que l'Auteur dit, & l'on se hâte de le finir. Mais dans les Mathématiques, par exemple, il n'en est pas de même, on se voit obligé à tout recommencer, si on ne veut demeurer dans une totale obscurité, à laquelle pourtant on ne sauroit se plaire. Il faut tout comprendre, ou l'on ne comprend rien du tout.

NEANDER. Que pensés-vous des Compends & des Abregés que l'on fait d'un Auteur, ou d'un livre qu'on étudie ?

MATHESIUS. J'en parlerai tout à l'heure. Mais il est à propos de remarquer auparavant que dans un prémier Cours, on doit s'attacher, pour ainsi dire, uniquement à bien comprendre son

Auteur, & à le ſuivre ſans faire un mêlange de pluſieurs autres ſur la même matière. De plus, s'agit-il de faire quelque demonſtration? on doit tâcher de comprendre d'abord exactement le ſens de la propoſition, de ſe rendre bien atentif à toutes les conditions qui la reſſerrent ou qui l'étendent, de comparer enſuite le ſujet & l'attribut, après s'être rendu familier l'un & l'autre ſeparément, de chercher après cela quel rapport ces deux idées peuvent avoir avec ce que l'on a vû auparavant, afin de s'aſſurer ainſi par le moien du connu de ce qu'il faudroit faire pour arriver à l'inconnu, & de ſaiſir de cette manière la demonſtration de l'Auteur, ou d'en trouver ſoi-même une autre; auquel cas on devra comparer, demonſtration avec demonſtration, pour voir quelle eſt la plus naturelle, la plus ſimple, la plus claire & la plus ingénieuſement exprimée. Mais il faut pour cela un examen modeſte, exact & impartial. Cependant je ne voudrois pas conſeiller à tout le monde ni en toute occaſion de ſe ſervir de cette méthode, ſur tout dans les commencemens, parce qu'il faut être déja un peu exercé à manier ſes idées avec facilité,

lité, & avoir un fond de pénétration & de justesse qu'il n'est pas aisé d'acquerir tout d'un coup. Il faut tout au plus l'essaier en diverses rencontres, & faire quelques tentatives pour y réussir : mais quand on s'appercevra que l'on n'emploie que de vains efforts pour faire soi-même une Demonstration, c'est alors qu'il importe beaucoup de réflèchir attentivement sur ce qui peut avoir été la cause de ce manque de succès, & sur les obstacles qui ont empêché d'y réussir. Peut-être découvrira-t-on que c'est pour n'avoir pas les idées de la question assés distinctes ni assés claires, non plus que celles que l'Auteur supposoit déja connues; peut-être même qu'on s'étoit formé des notions toute opposées, ou du moins fausses de la proposition que l'on vouloit prouver; peut-être que, pour suivre avec opiniâtreté une fausse lüeur, un rapport vraisemblable de certaines idées avec celle de la question, on s'est écarté de son but au point de le perdre bien-tôt de vûe. Enfin on connoitra par là ses forces, sa pénétration, sa vivacité, son exactitude, & la nature des idées que l'on a acquises.

Les Propositions Mathématiques sont

ordinairement & presque toujours énoncées en termes généraux ; & à cet égard, il faut observer deux choses. La première, c'est de ne pas quitter une proposition qu'on ne l'ait comprise dans toute son étendue, c'est-à-dire, de ne lui en supposer ni plus ni moins qu'elle n'en doit avoir effectivement. En second lieu, il faut avoir soin d'appliquer ces propositions à divers exemples ; de cette manière on comprend beaucoup plus aisément, l'esprit remonte ainsi peu à peu du Particulier au Général, & d'ailleurs on repasse une même chose un grand nombre de fois, & on évite par là l'ennui des repétitions. Il est pourtant vrai, à le bien prendre, qu'il seroit plus à propos de commencer par le Général, de peur qu'en s'arrêtant à des exemples, on ne fasse un mélange confus du Déterminé avec ce qui est plus Vague, & que l'on ne se contente que d'inductions ou de preuves imparfaites ; car un exemple renferme toujours quelques idée étrangère à l'idée universelle, qu'il est difficile de conserver telle qu'elle est, sans y rien changer, quand elle passe & repasse par tant d'exemples, à moins qu'on ne sache exactement en quoi elle

elle consiste. Et à propos d'Exemples, je ne saurois m'empêcher d'admirer le ridicule de certaines personnes, qui disent que les exemples ne prouvent rien, à cause que l'on doit se servir de Demonstrations générales & non pas de preuves particulières; car un exemple est autant susceptible de Demonstration qu'une vérité énoncée d'une manière universelle; mais il ne prouve que pour un seul cas, à moins que de faire voir que la force de la Demonstration ne dépend point des conditions qui se trouvent dans l'exemple & qui ne sont pas renfermées dans l'idée universelle; alors l'exemple prouve autant que la Demonstration la plus générale. Quand même on a pris toutes ces précautions, il faut ne pas quitter un Article ou une Proposition, qu'on ne l'ait non seulement bien comprise, mais, encore qu'on ne soit venu à bout de pouvoir suivre la Demonstration sans le secours du livre, & de l'Auteur, ni même de quoique ce soit d'autre que de son entendement & de son imagination. Ainsi dans les Propositions de Géométrie, il faut autant que cela se peut, se représenter la figure, & se rendre cette image aussi distincte que si on la voioit re-

repréſentée ſur le papier ; & de là il en reſultera manifeſtement un nouvel avantage, qui eſt la force & la vivacité de l'imagination.

NEANDER. J'ai ouï dire à certaines perſonnes, que, lorſque on étudioit un livre, il falloit le parcourir d'un bout à l'autre dans une prémière lecture, ſeulement pour voir ſi on eſt en état de le comprendre tout entier, & ſe reſerver pour un ſecond cours de ſe le rendre bien familier.

MATHESIUS. Ce conſeil me paroit bon à certains égards ; cependant je ne voudrois faire, ni de cette méthode ni de la mienne, une règle ſans exception. Ce ſont de ces choſes dont le bon ſens doit décider, quand l'occaſion s'en préſente, & qui ne peuvent pas être preſcrites commodément par des loix ni par des règles générales : je connois pourtant bien des ſcrupuleux qui ſe recrient extrêmement contre une telle coûtume, comme contre un abus des plus pernicieux. Mais ſans m'amuſer à cette diſpute, dont on ne retireroit pas, je penſe, de grandes utilités, je viens aux Compends & autres compoſitions, dont vous me parliés, il n'y a qu'un moment. Je crois qu'il eſt bon

d'en,

d'en faire, & que cela eſt même très important, pourvû que l'on s'y prenne comme il faut. Il en eſt de pluſieurs ſortes. Les uns ne conſiſtent que dans un recueil de definitions & d'arguments des propoſitions dont un Auteur a traité. Les autres ſont plus étendus ; ils entrent dans le détail des preuves ; ils en rapportent le précis ; ou bien en d'autres endroits, ils expliquent plus au long la penſée de l'Auteur & l'expriment en d'autres termes. Il y a outre cela certains Commentaires qui avancent de nouvelles propoſitions, démontrent d'une autre manière, fourniſſent des idées toutes différentes, en ſorte que l'Auteur ſur lequel on a travaillé, ne ſert que comme de baſe à un recueil plus étendu & à un aſſemblage de connoiſſances nouvelles. Je n'ai que quelques remarques à faire ſur ce ſujet. Il faut obſerver prémièrement que les Abregés, qui ne conſiſtent, à proprement parler, que dans une ample table des matières, ſuppoſent que l'on connoit déja parfaitement l'Auteur ſur lequel on travaille, ou du moins qu'on en a achevé l'étude. De plus, dans les livres de Mathématiques, par exemple, les extraits ſont rarement uti-

les; car un bon Auteur n'a rien mis de trop dans ce genre d'écrire; son stile est concis & exact; il va d'abord au fait; de sorte que ce seroit desigurer l'ouvrage que de l'abreger, à moins de faire un recueil des principales propositions & de celles qui sont fondamentales : mais je parle d'abreger les Demonstrations, par exemple, & autres choses de cette nature. En troisieme lieu, il est de fait que la plûpart sont infatués de leurs Compends, & qu'ils les font ou négligemment, ou dans la fausse pensée que l'on possede parfaitement sa matière, lorsqu'on en a fait un extrait, tant bien que mal, sans qu'il soit nécessaire de le revoir, & de repasser l'Auteur sur lequel ils se sont donné la peine de travailler. On diroit, à en juger par leur conduite, que ce qu'ils ont écrit, est en même tems & par là même rangé méthodiquement dans leur esprit, de manière qu'ils pouront toujours en faire usage dans le besoin.

Lorsque par une étude & une application continuées, on s'est un peu affermi dans le goût de la Demonstration; on peut en inventer soi-même, en chercher de meilleures, & de plus exactes. Or

Or les plus simples sont préférables, & celles qui méritent le plus d'estime & d'empressement; elles sont beaucoup plus claires que ces enchainures de propositions, qui demandent de trop grands efforts d'attention, & qui font voir tout au plus qu'une chose est, sans montrer avec assés d'évidence, pourquoi elle doit être ainsi.

NEANDER. Que dirés-vous des Demonstrations qui se font par lettres? J'ai ouï dire à certaines personnes, que les Demonstrations par chiffres & celles qui se font par un simple raisonnement, n'en approchent pas pour la force & pour l'évidence.

MATHESIUS. Ceux qui raisonnent ainsi, font bien voir qu'ils n'ont tiré d'autre avantage des Mathématiques, que celui de mettre à découvert leur ignorance & la petitesse de leur génie; je dis que c'est un avantage, parce qu'effectivement c'est un bonheur pour eux, qu'on ne les croie pas plus habiles qu'ils ne le sont en effet. Mais je ne m'arreterai point à cette objection, qui ne vaut pas assurement la peine d'être examinée; je vous avertis seulement par occasion que dans nos conferences Mathé-

thématiques, nous nous servirons pour l'ordinaire de plusieurs Démonstrations sur un même sujet, & nous emploierons presque toujours le simple raisonnement, pour établir la vérité d'une proposition.

NEANDER. On dit qu'il arrive presque à tous les Mathématiciens, de supposer démontrées des choses qui ne le sont point, & de s'y tromper même aisément.

MATHESIUS. Cela est vrai; & la raison en est pour l'ordinaire, que l'on ne s'est pas rendu assés familiére la proposition qu'il faut prouver, en sorte qu'on oublie aisément quelqu'une des conditions, sous lesquelles elle est comprise; ou que trompé par de fausses lueurs, on arrive à des conclusions differentes, à la verité, mais qui ont pourtant beaucoup de rapport avec celle où l'on veut venir; ou enfin de l'inatention à quelqu'une de ces règles qu'il faut suivre dans la découverte de la vérité & que la Logique nous enseigne. Un remède général à ce desordre, c'est de ne donner son assentiment à une vérité qu'après l'avoir très distinctement comprise, qu'après avoir été éclairé par une parfaite évi-

vidence, qu'après avoir été en état de
uivre la Demonstration d'un bout à l'autre avec facilité, & de savoir d'abord
endre raison de tout ce qu'on avance,
nfin de pouvoir s'exprimer d'une manière aisée, & sans être le moins du monde embarassé dans l'explication que l'on
n donnera aux autres : car on remarque très souvent qu'il est des choses que
'on croit comprendre parfaitement, &
ur lesquelles on s'imagine qu'il est impossible de contester avec la moindre apparence de fondement ; mais dans la suite
cette belle découverte se reduit à une
fausseté manifeste, ou bien vous vous
trouvés, dans certaines circonstances où
l'on veut faire parade de son savoir,
dans un embarras dont vous ne pouvés
guères vous tirer, qu'à la faveur de l'ignorance de ceux qui vous écoutent. Je
vous en donnerai des exemples, quand
l'occasion s'en présentera, afin que vous
puissiés sentir par vous-même toute l'exactitude & les soins qu'il faut apporter
pour démêler l'erreur de la vérité, & pour
acquerir des connoissances sûres, même
dans les sujets qui sont le plus susceptibles d'évidence & de clarté.

Une autre remarque, que je crois très
im-

importante, c'eſt d'éviter l'autre extremité, qui eſt de ne vouloir pas chercher une évidence plus grande, qu'il n'eſt poſſible d'en avoir. On voit en effet pluſieurs perſonnes, qui, dans le tems qu'elles comprennent une propoſition, ne ſont pas toutefois contentes de l'évidence qui les éclaire, & des raiſons qu'ils ont pour acquieſcer à cette vérité; ils demandent toujours, pourquoi une choſe eſt ainſi, & toutes les explications que vous tâchés de leur donner, ne leur empêcheront pas de former de nouveaux doutes, & de s'embarraſſer de difficultés chimériques. C'eſt là une illuſion, une perte de tems, & même une habitude dangereuſe, qui peut aller plus loin que l'on ne penſe, & diſpoſer quelquefois à un Pyrrhoniſme univerſel.

NEANDER. Cela m'eſt arrivé très ſouvent, & je vous avoue qu'à force de vouloir penſer à certaines choſes, qui d'abord me paroiſſoient plus claires que le jour, je venois bien-tôt après à y decouvrir des difficultés très embarraſſantes.

MATHESIUS. Tout cela vient, de ce que l'on veut chercher du myſtere là où il n'y en a point, & que l'on detour-

tourne ſes yeux de l'évidence que l'on a, pour les arrêter ſur une plus grande, qui très ſouvent ne ſe peut trouver, & qui n'eſt pas même néceſſaire la plûpart du tems. Il y a bien des gens qui ſeroient contens, s'ils pouvoient toucher du doigt & voir à l'œuil, les propoſitions que l'entendement eſt capable de démontrer; ils feroient plus de cas de cette vûe corporelle, ſi elle étoit poſſible, que des meilleurs raiſonnemens & des preuves les plus fortes. Je m'arrête un moment à cet exemple; *deux & deux ſont quatre*; cela vient de ce qu'on a ajoûté deux à lui même; c'eſt toute la raiſon qu'on en peut rendre, il n'y en a pas d'autre. Mais d'où vient cela? Voulés-vous un éclairciſſement, on va vous ſatisfaire. Deux & deux ſont quatre, cela ſignifie, *deux & deux ſont deux & deux*, lequel aſſemblage reçoit le nom de quatre: l'idée de quatre, c'eſt l'idée de trois plus l'unité, & dans l'idée de trois plus l'unité, j'apperçois l'idée de deux pris une fois & de deux pris encore une fois; car on a $3 + 1 = 4$: mais $3 = 2 + 1$: Donc $3 + 1 = 2 + 1 + 1 = 4$: il n'y a qu'à ſuivre ce raiſonnement, & on verra que $2 + 2 = 4$. L'eſprit a de la peine à ſui-

ſuivre cette Demonſtration, par là même qu'elle eſt ſi ſimple, & qu'une trop grande facilité produit à peu près le même embarras que l'examen de certaines vérités dont l'intelligence demande plus d'art & de compoſition. La raiſon n'en eſt pas difficile à découvrir : c'eſt qu'à tout moment, dans des queſtions auſſi ſimples, nous appercevons la concluſion, & que notre eſprit n'a pas de coûtume de proceder avec méthode pour y arriver. Il faut donc fixer, comme malgré elle, une attention qui s'échappe & qui ne s'arrête qu'avec peine ſur ce qui eſt ſi clair & ſi facile. Que ſi après cela, vous allés vous embarraſſer de queſtions, de *comment* & de *pourquoi*, vous ſuppoſerés bien-tôt ce qui n'eſt pas, vous vous faites des difficultés imaginaires; après quoi, il n'eſt pas ſurprenant que l'évidence vous échappe & que vous la perdiés de vûe.

Ce qu'il y a de ſurprenant en ceci, c'eſt que pour l'ordinaire on affirme les propoſitions les plus évidentes, ſans appercevoir actuellement la liaiſon des deux idées qui la compoſent. Il arrive ſouvent qu'après avoir repété une propoſition un grand nombre de fois, on ne

fait

ait qu'en lier les noms, parce qu'on a
conçu d'abord la liaison des choses, on
se souvient seulement qu'on l'a eu com-
prise. Voilà pourquoi on n'y fait plus
d'attention, & l'on croit entendre le sens
d'une chose, dont on n'a aucune idée,
ou du moins dont on a des idées fort
embrouillées; de là naissent bien des mé-
prises, sur tout quand les vérités dont
il s'agit, sont exprimées en termes gé-
néraux, parce qu'alors elles frappent
beaucoup moins que si on en faisoit l'appli-
cation à quelque cas particulier. J'ai con-
nu par expérience des gens qui admet-
toient aveuglement plusieurs propositions
Mathématiques, parce qu'on les donnoit
pour des Axiomes; le moien de croire
que l'on ne puisse pas comprendre sur le
champ des choses qui n'ont pas besoin
de preuves? on ne fait donc que les en-
trevoir, & on y passe si légérement, que
l'on se trompe quelquefois, quand on
veut se servir d'exemples, & d'idées plus
determinées. C'est là une chose de fait,
& que je puis vous assurer pour l'avoir
vû assés fréquemment.

J'ai encore quelques conseils à vous
donner sur la manière d'étudier les Ma-
thématiques, dont le plus important de
tous,

tous, celui que je vous recommande comme d'une néceſſité indiſpenſable, & que je ne ceſſerai jamais de vous recommander, c'eſt d'écrire l'argument de vôtre propoſition, de faire la figure de Geometrie, par exemple, s'il en s'agit, telle que la demandent *les Data* de la propoſition & de faire l'operation entiére, ſoit de vous même, ſoit avec le ſecours de l'Auteur, dans quel cas que l'on ſe rencontre, que ce ſoit Arithmetique, Algèbre, Mechaniques &c. Il faut pourtant remarquer que l'on peut quelquesfois commencer par tâcher de comprendre la propoſition en liſant l'Auteur attentivement; d'autres fois par contre mettre d'abord en pratique la méthode que je vous conſeille, & cela ſuivant que l'on y eſt diſpoſé, ſuivant la nature des propoſitions que l'on étudie, & ſuivant que le bon ſens ſemble l'exiger pour lors. Cependant il importe d'avantage pour l'ordinaire d'emploier la méthode dont nous venons de parler, 1°. toujours il ne faudra pas négliger de s'en ſervir avant que de paſſer à un autre article. 2°. Les heures du matin conviennent à cette étude pour avancer, & les heures d'après midi pour repaſſer ce que l'on a déja fait.
3°.

. Il faut interrompre son travail, tou-
; les fois que l'on voit, que l'on fait
.nutiles efforts pour être attentif, & il
ıut mieux y revenir plus souvent que
: s'obstiner sans raison à étudier, quand
ı n'y est du tout point disposé. 4°. Il
.ut ordinairement étudier seul le matin,
: repasser le reste du jour avec diverses
ersonnes, si l'on peut, ou du moins
vec un qui ne sache pas la matière dont
l s'agit, & avec un autre qui la connoisse.
;°. Quand on veut se mettre à cet ou-
/rage, il faut choisir le tems où l'on
elt le mieux disposé à étudier, & le tems
où on l'est le moins : on tirera de ces
deux extremités de très grands avantages,
comme il est aisé de le voir, & ceci ne
combat point ce que je viens de dire, qu'il
falloit interrompre son travail dans le
tems où l'on se sent une disposition peu
favorable à cette étude. 6°. On doit re-
passer souvent les matières que l'on a dé-
ja apprises, & prendre soin d'en faire
toujours une espèce de revûe, quand on
recommence un nouveau chapitre ou une
nouvelle section. Ces sortes de repeti-
tions doivent se faire promptement, &
il faut tâcher de n'y faire entrer que l'es-
sentiel. 7°. On observera la suite & la
liai-

liaiſon des penſées de ſon Auteur, on verra ſi l'article qu'on lit, contient une définition, ou un Axiome, ou un Théorème &c. On peſera les arguments dont il ſe ſert : on examinera leur nature, leur force & leur degré d'évidence; on diſtinguera les idées principales des acceſſoires, le ſujet de ſon attribut ; on s'appliquera à découvrir l'idée moienne dans un raiſonnement; enfin on ſe rendra exact ſur les choſes, qui paroiſſent même être les moins importantes.

Quand on a repaſſé ſufiſamment, car je n'ai rien à preſcrire ſur le tems ou le nombre de fois que l'on doit faire ces repétitions, on devra choiſir un autre Auteur qui traite le même ſujet. Alors il faudra comparer le but & les vûes de ces deux Auteurs, leur Methode, leur clarté, leur exactitude, l'étendue de leurs ouvrages, leur Stile, en un mot toutes les qualités qu'ils doivent avoir l'un & l'autre. Dans ce cas, on prendra le premier pour ſervir comme de baſe aux connoiſſances que l'on a ſur cette matière, on y augmentera ou on en retranchera, on otera ce qui paroît ſuperflu & defectueux, pour lui ſubſtituer ce qui a été omis mal à propos. Un examen de cette

natu-

ıture ne peut que donner à l'esprit, de justesse, de la force & de la fécondité. 'est le dernier conseil que j'ai à vous ›nner sur ce sujet ; & ce sont là aussi s principales réflexions que j'avois à faisur la manière d'étudier les Mathématiıes. Il s'agit à présent de parler des ʻantages que cette étude peut nous proırer, mais nous nous reservons de comencer cela dans une prochaine entreûe.

NEANDER. Je suis charmé de vos ꜰflexions & des Règles que vous avés ɔnné pour diriger ses études par rapport ıx Sciences ; aussi je ne veux rien négliger pour les mettre en pratique, autant ue ma petite capacité & mon peu d'inustrie pourront me le permettre.

ENTRETIEN III.

MATHESIUS.

NOus voici parvenus aux avantages, que l'on peut retirer d'une Science n général & en particulier des Mathémaiques. Et quoique l'ordre semblât requeir en quelque façon de commencer par aire voir de quelle utilité sont les Mathé-

thématiques, avant que de preſcrire la manière de les étudier, je n'ai pas laiſſé néanmoins de ſuivre une route toute oppoſée, parce que je crois que ce que j'ai dit juſqu'ici, peut avoir ſon utilité, même independamment de ce que nous allons établir dans la ſuite. Mais ſans m'arrêter d'avantage à cette recherche, non plus qu'à juſtifier ma methode à cet égard, je ne crois pas la choſe aſſés importante, pour en faire l'objet d'un examen particulier. Ainſi nous entrerons d'abord en matière.

NEANDER. Je me réjouis bien d'entendre les eloges que vous allés donner à cette Science; & vous trouverés en moi une perſonne tout a fait diſpoſée à y ajoûter foi: car je prend tous les jours plus de goût pour cette étude.

MATHESIUS. Vous devés déja les connoitre, du moins en gros, par votre propre expérience, puiſque vous en avés fait une eſpèce de cours. Mais au reſte, ſoiés perſuadé que je ferai tous mes efforts, pour ne rien dire d'exaggéré, rien qui ſente une louange outrée, ou une prévention exceſſive, qui aille à établir des choſes contraires à la vérité.

Le prémier de tous les avantages que pro-

'ocure l'étude des Mathématiques, c'est
dire, celui qui se présente le plus na-
ırellement, & qui est le plus considéra-
.e en même tems, c'est la certitude.
out ce que l'on y propose est démon-
é avec la dernière évidence. Les véri-
s que l'on y présente, ne tirent point
ır force d'une expérience extérieure &
ıi vienne des sens; on ne se contente pas
›ur les établir, de simples preuves, de
:obabilités, d'inductions & de conjec-
ıres, quelque degré de vraisemblance
ı'elles puissent avoir. De là vient que
s Sciences éclairent l'esprit, lui appren-
ınt ce qu'est la véritable certitude, le
ırantissent de l'erreur, le forment au
›ût de l'évidence & à l'habitude de ne
rendre qu'à elle. Dans les autres Scien-
:s au contraire, que de Systèmes, que
incertitudes, que d'opinions differentes
r un même sujet? on est obligé, pour
nsi dire, à chaque pas que l'on fait, de
spendre son jugement, dans la crainte
se méprendre, de rester dans le doute
ıs espérance d'en sortir, ou du moins
n'en sortir qu'au risque d'embrasser
rreur pour la vérité & de décider sans
ıe pleine conviction sur le parti pour
ıuel on se détermine.

En effet, que nous disent ces controverses agitées depuis un grand nombre de siècles, ces disputes sans fin, cette prodigieuse varieté & même cette opposition de sentimens, soutenus par les génies les plus consommés, par les hommes les plus célèbres, & par les Savants les plus distingués; que nous apprennent toutes ces choses, si ce n'est que les Sciences où se traitent les matières, qui sont l'objet de ces contestations, sont incapables de fournir à l'esprit humain les moiens d'acquerir des connoissances sûres, & de demêler la vérité avec une parfaite certitude & une entiére évidence, au travers des nuages dont elle est enveloppée? Combien de fois l'expérience n'a-t'elle pas montré, que des choses qui paroissoient prouvées par des arguments incontestables & des raisons sans replique, des choses qui avoient été l'objet de la méditation d'une infinité de personnes de tout âge, de tout sexe, de toutes conditions, de plusieurs tems, de plusieurs lieux, par des génies de tout ordre, des choses à l'égard desquelles il sembloit qu'on eût prévenu toutes les objections possibles, & donné la solution de toutes les difficultés dont elles paroissoient susceptibles

ceptibles, que ces choſes, dis je, oui ces choſes même établies par tant d'endroits, & ſoutenues par tant de preuves, étoient néanmoins d'une fauſſeté manifeſte, juſque là qu'on eſt venu au point de la démontrer auſſi ſolidement que les propoſitions les plus évidentes & les vérités les mieux reconnues. Je n'apporterai pour exemple que le Syſtème de Deſcartes ſur le vuide. J'en pourrois alléguer cent autres, mais je m'en tiens à celui-là; encore ne m'y arrêterai-je pas; la choſe eſt ſi inconteſtable, que ce ſeroit peine perdue d'en dire d'avantage; & je vous laiſſe le ſoin d'en tirer les conſéquences que vous jugerés à propos. Mais ici, c'eſt-à-dire, en fait de Mathématiques, il y a une grande différence: les connoiſſances que l'on y acquiert, ſont des connoiſſances certaines, marquées, pour ainſi dire, au bon coin, on ſait ce que l'on poſſede, & on ne court pas riſque de s'en voir privé; on y eſt à l'abri de ce tas d'objections, capables très ſouvent d'ébranler notre certitude ou de nous ravir le fruit de nos travaux, mais toujours embarraſſantes & pénibles à refuter. Il eſt vrai que l'on allegue quelques exemples de controverſe dans les Mathématiques, & cela paroit

d'abord rabbatre un peu de l'idée que nous avons donnée de cette Science : cependant une difficulté de cette nature ne doit vous faire aucune peine, puisqu'il est certain d'un côté que ce qui a occasionné des disputes entre les Mathématiciens, ne fait qu'une très petite partie de ce vaste corps ; & que d'ailleurs le sujet de leurs contestes ne regardoit pas, à proprement parler ni d'une manière directe, l'objet de cette Science, je veux dire les quantités ou la grandeur en général ; de sorte qu'on peut fort bien retrancher des Mathématiques, tout ce qui a pû servir de matière à disputer ou ce que l'on a voulu y inserer comme en faisant partie ; après quoi il sera toujours vrai de dire, comme nous le faisons, que c'est une Science certaine, où il n'y a rien que d'évident, rien qui ne puisse être demontré d'une manière convaincante. Or les avantages que l'on peut retirer des Mathématiques à cet égard sont des plus considérables ; en effet qui ne voit que par ce moien on prend nécessairement l'habitude de ne se contenter que de preuves solides, que d'arguments pleins d'évidence & de force ? On ne se laisse pas éblouir par des vraisemblances, ni

ni impoſer par des tours ſpecieux, on veut voir par ſes propres yeux, on n'eſt point ébranlé par les Sophiſmes de l'eſprit & du cœur, qui ſeduiſent tant de perſonnes, & qui tiennent chés eux le même rang que celui que la raiſon ne conſacre qu'à la véritable évidence. Dans tout le cours de notre vie & ſur tout dans les inſtructions que nous avons reçues ſur d'autres ſujets, combien de fois n'avons nous pas acquieſcé à ce qui nous faiſoit le plus de plaiſir, à ce qui avoit le plus d'apparence, à ce même, qu'on ne faiſoit que nous aſſurer être tel; & cela uniquement parce qu'il nous faiſoit du plaiſir, parce qu'il nous paroiſſoit vraiſemblable, parce qu'on nous le diſoit ainſi.

Il eſt donc bien important, il eſt même très néceſſaire pour ceux qui aiment ſincérement la vérité & qui ſe félicitent de s'en aſſurer la poſſeſſion, par la facilité qu'ils auront de la démêler de l'erreur, d'étudier les Mathématiques, Science dans laquelle on ne ſe trompe point, où l'on enrichit ſon eſprit de belles connoiſſances, mais ſurtout de connoiſſances ſures, certaines & évidentes; car il n'eſt pas ſeulement beſoin de raiſonner pour

faire voir que dans des études où l'on n'emploie que la Démonſtration, & où l'on n'a d'autres guides que l'évidence, on acquiert infailliblement un fond d'amour pour la vérité.

NEANDER. Je m'impatiente de ſavoir ce que vous aurés à répondre à ceux qui ſoutiennent que l'étude des Mathématiques eſt très nuiſible à toute perſonne qui vit dans le commerce du monde, & qu'elle ne convient qu'à ceux qui ménent une vie retirée, ou qui s'y adonnent entiérement : & cela ſous le prétexte que l'on y prend ſi fort le goût de la Démonſtration qu'on veut en faire uſage par tout, & que dans une infinité de ſujets qui ne ſont pas ſuſceptibles de ce genre de preuves, on eſt vétilleux, chicaneur, opiniâtre & difficile à déterminer. La conduite ordinaire des hommes n'exige pas, dit-on, une ſi grande évidence; bien ſouvent on n'en peut avoir une telle. De plus, il arrive un grand nombre de choſes dans la ſocieté où il ſeroit dangereux même d'attendre pour agir que l'on eut des preuves indubitables & certaines, & il faut ſe contenter alors du plus vraiſemblable; que feroit un Mathématicien, ajoûte-t-on, dans de telles con-

jonc-

jonctures? Certainement il prendroit le plus mauvais parti, en voulant choisir le plus prudent; il seroit irrésolu dans le tems où il ne faut user d'aucun délai. Enfin, & ce qui est le plus facheux, diront-ils, c'est que le Mathématicien ne trouve, à proprement parler, de démonstration que dans sa Science favorite; il traite aisément de chimère & d'incertitude de tout ce qui n'en est pas susceptible; il méprisera la Théologie, la Jurisprudence, la Morale, la Politique, la Physique, l'Histoire &c. & par là même, quelque génie qu'il ait d'ailleurs, & quelque considerables que puissent être ses talens & ses lumiéres, il refusera d'y donner son application, se rendant à cet égard inutile à la societé dont il est membre. D'où l'on conclut que cette Science est plus pernicieuse à l'esprit qu'elle ne lui est avantageuse, & qu'il n'y a que ceux qui ont dessein de s'y voüer entierement & d'en faire, pour ainsi dire, leur unique occupation, à qui elle puisse convenir.

MATHESIUS. Vous avés encore bien fait de ne vous être pas laissé gagner par ces personnes dont vous me parlés; car vous me paroissés fort avoir disputé avec ces gens là, ou bien

avoir été temoin de leurs diſcours à ce ſujet. Mais qui ſont ceux qui font de ſemblables objections? Ce ſont des gens pour la plûpart, qui de leur vie n'ont ſû ce que c'eſt que Mathématiques, & je vous avoue que leur ſentiment à cet égard & leur déciſion formelle ne me mettent guères en peine. Il ſemble par contre qu'il y ait à craindre de la part de ceux, qui, après avoir fait un cours de Mathématiques, quelque qu'il puiſſe être, s'aviſent enſuite de les décrier. „ Voiés, ne man-
„ quera-t-on pas de dire, voiés ces gens
„ là, ils connoiſſent bien les Mathéma-
„ tiques, il faut donc que ce ne ſoit pas
„ grand choſe, puiſqu'ils ne les ont pas
„ ſeulement diſcontinuées, mais que de
„ plus ils les déconſeillent aux autres. Une pareille concluſion eſt trop précipitée, on ne ſauroit le nier; cependant ſa liaiſon avec le Principe paroit d'abord naturelle, & a un certain air de vraiſemblance capable d'en impoſer à des eſprits peu attentifs.

Pour répondre donc à l'objection que vous me faites, & juſtifier à cet égard ce que j'ai dit ſur le prémier avantage qu'on peut retirer de l'étude des Mathématiques; je dirai d'abord que l'on ne ſauroit

diſ-

iſconvenir du fait, on eſt obligé de l'a-
·ouer jusqu'à un certain point ; mais je
ıie que ce ſoit une ſuite naturelle & né-
ceſſaire de l'étude des Mathématiques; je
ſoutiens que cet inconvénient n'a lieu
que par l'abus qu'on en fait, abus qu'il
eſt très poſſible d'éviter, & dont mille
précautions peuvent nous garantir. La
prémiére & la plus ſûre, eſt de ne s'y
pas livrer avec excès, & de joindre à cet-
te étude d'autres occupations propres à
prévenir tous les défauts dont on nous
parle. D'ailleurs les utilités que l'on re-
tire de cette Science par rapport à la net-
teté & à la certitude des connoiſſances
que l'on y acquiert, ne pourroient-elles
point contrebalancer en quelque façon
les mauvaiſes habitudes que l'on y au-
roit contractées quoiqu'elles en fuſſent in-
ſéparables ; & à notre tour, il nous ſera
bien permis de dire, que les Mathémati-
ques ſont la ſeule Science qui nous mette
le mieux en état d'acquerir ces heureuſes
diſpoſitions dans le plus haut degré, ſa-
voir un amour dominant pour la vérité
& une habitude conſtante de ne ſe ren-
dre qu'à elle. Mais ce n'eſt pas tout :
comment oſeroit-on ſoutenir que l'habi-
tude que nous avons contractée dès no-

tre enfance, de donner notre assentiment à des propositions douteuses, incertaines & même très souvent fausses, une habitude dont il n'y a point de jour, pour ainsi dire, que nous n'en renouvellions les actes; que cette habitude, dis-je, ne puisse être surpassée, & même beaucoup au de-là, par celle que l'on acquerra en étudiant les Mathématiques, qui n'est pas dans sa nature si conforme à nos inclinations, & dont les actes ne s'exercent point aussi souvent, comme on ne sauroit en disconvenir. Une autre réflexion qui, à mon avis, est bien importante, c'est que, comme nous le verrons dans la suite, on se procure par le moien des Mathématiques, un goût d'exactitude, & un discernement qui nous mettra bien en état de distinguer les sujets plus ou moins susceptibles d'évidence & de Démonstration, par conséquent d'assigner à chacun d'eux le degré de lumiére dont ils ont besoin pour que l'on puisse y acquiescer raisonnablement. Enfin, & cette considération servira de réponse à plusieurs objections de la même nature, quand on connoit un mal ou un abus simplement possible, on peut aisément l'éviter, pourvû qu'on le vueille sincére-

rement; car il n'en eſt pas des maux de l'eſprit comme de ceux du corps, *les connoitre & vouloir s'en défaire* eſt un ſpecifique infaillible contre les maladies de ce genre. Ainſi pourvû que les défauts que l'on reproche aux Mathématiciens ne ſoient pas inſurmontables, ce que l'on ne peut ſoutenir avec raiſon, on pourra toujours les prévenir ou les corriger: ce qui joint aux autres réflexions que nous venons de faire ſur ce ſujet, m'autoriſe, ce me ſemble, à conclure que l'on ne doit point ſe dégoûter de l'étude des Mathématiques, à la vûe des abus qui pourroient en reſulter, mais qu'au contraire on doit les rechercher avec empreſſement, à cauſe des avantages qu'elles nous procureront certainement, & dont le prémier qui eſt celui que nous venons d'examiner, eſt déja plus que ſuffiſant pour toute perſonne raiſonnable, & tout à fait propre à l'y déterminer.

En vain on alleguera l'expérience contre nous; elle ne ſera point capable de nous faire abandonner nos principes; & ſans s'amuſer à conteſter les faits que l'on rapporte à ce ſujet, il convient mieux de remarquer ſimplement que l'on ne fait point mention ici des exemples op-

posés qui sont en grand nombre & qui suffisent bien pour diminuer de beaucoup le poids de l'objection. On ne prouve pas que ceux dont on nous parle, aient fait de grands efforts pour prévenir de tels abus, & pour les éviter; on ne fait pas voir que leur naturel ne les y portoit point d'ailleurs, & que s'ils ont contractés de tels défauts, c'est parce qu'ils se sont adonnés à l'étude des Mathématiques; on n'entre point dans le détail des précautions qu'ils ont prises pour en tirer tout le fruit convenable ; on ne prouve pas non plus qu'ils aient suivi à tous ces égards les règles dont la pratique est importante, & l'observation indispensable soit pour se garantir des mauvais effets que produisent les études mal digerées, sur tout celle dont il s'agit, soit pour se procurer les avantages & les utilités qui sont une suite immanquable de cette même étude faite avec succès & conduite avec prudence. Cependant tout cela est néceſſaire, pour montrer que ce prétendu défaut est une suite naturelle & presque inévitable de l'étude des Mathématiques. Quand on voit un Mathématicien qui ne se contente pas de preuves médiocrement bonnes, & qui refuse de don-

donner ſon aſſentiment à une choſe qui au fond ne la mérite pas, à plus forte raiſon quand on en apperçoit quelqu'un qui tombe dans cet écart qu'on leur reproche tant, on n'a garde de mettre cela en oubli; *voilà*, dit on, *le fruit de ſes Mathématiques; il eſt opiniâtre, incrédule, irreſolu, ne ſachant jamais quel parti prendre, & trouvant des difficultés par tout où il n'y a pas de Démonſtration:* par contre cette même perſonne vient-elle à donner des marques les plus ſenſibles d'une crédulité exceſſive, alors on y ferme les yeux, ou l'on n'y fait attention que pour le reprendre, non en qualité de Mathématicen, mais comme l'on en agiroit à l'égard de tout autre. De même ceux qui n'ont jamais étudié, ni peut-être entendu parler de cette Science, donneroient bien ſouvent des marques ſenſibles de leurs obſtination & de leur défiance, ſans que l'on s'aviſât pour cela de remarquer qu'il ne faut pas être Mathématicien pour porter l'entêtement à ſon comble, mais que c'eſt un vice de tout âge, de tout ſexe & de toute condition. On ne penſe au bonheur qu'ils ont de n'avoir jamais entrepris une étude auſſi dangereuſe, que lors qu'ils ſe montrent faciles à adopter vos

vos ſentiments & qu'ils ſe laiſſent perſuader par un leger examen. Voilà dit on alors, des gens qui n'ont point la cervelle gâtée par la Démonſtration, c'eſt ainſi qu'il faut être, pour vivre en Societé. Vous voiés par là, de quelle manière l'on s'abuſe pour l'ordinaire à ce ſujet, & que l'on perſiſte dans la fauſſe penſée que les Mathématiques ſont plus propres à gâter l'eſprit qu'à le former & qu'il eſt dangereux, de ne ſe rendre qu'à l'évidence, d'établir la vérité par des arguments les plus ſolides, & de ſuſpendre ſon jugement dans les cas douteux & incertains. Mais en voilà aſſés ſur cet article, paſſons aux autres avantages que procure l'étude des Mathématiques.

NEANDER. Celui-ci eſt déja aſſés conſidérable pour mériter les recherches & l'empreſſement de toute perſonne raiſonnable.

MATHESIUS. Je ne deſeſpère pas de vous donner du goût pour cette Science, dès le moment que vous penſés ainſi. Je dis donc, & cela pour affermir d'autant mieux vôtre foi, qu'un ſecond avantage des Mathématiques, c'eſt de nous faire aimer la vérité par elle-même, & indépendamment des avantages extérieurs qui peuvent l'ac-

com-

:ompagner; car on peut s'en aſſurer la
›oſſeſſion ſans être traverſé par des illu-
ions flateuſes, ni par des préjugés trom-
›eurs, ni par des charmes ſéduiſants qui
ıous dérobent, pour ainſi dire, l'eſprit
l'examen, de circonſpection & d'impar-
ialité ſi néceſſaires dans ces occaſions là,
›récautions ſans leſquelles on ne doit rien
: promettre à cet égard. Si, au contrai-
e, on jette les yeux ſur les autres Scien-
es, on verra d'abord que les objets qu'el-
:s offrent à notre eſprit, dépendent pour
ordinaire & ont avec notre intérêt des
aiſons fort étroites, & des rapports trop
:nſibles, pour n'être pas portés à des
éſirs qu'ils fuſſent réels ou chimériques,
ıivant qu'ils peuvent contribuer plus ou
ıoins, à ce en quoi nous faiſons conſiſ-
r notre véritable bonheur, ſuivant
ı'ils nous ſont utiles ou préjudiciables,
térreſſans ou non. Une perſonne qui
:amine, mais qui craint en examinant de
ouver une choſe, qui lui attire ſa diſ-
ace ou quelqu'autre malheur ſemblable,
›it avoir un grand fond d'amour pour
vérité, s'il refuſe de ſe rendre à tout
tre motif & s'il préfère à ſa fortune
à ſa reputation le plaiſir, quelque glo-
:ux qu'il puiſſe être, de s'attacher au
vrai

vrai & d'en faire son unique thrésor. Nous jugeons presque toujours des choses, sur ce que nous voudrions qu'elles fussent plûtôt que sur ce qu'elles sont en effet; c'est pour l'ordinaire notre intérêt qui nous détermine, & cet intérêt, on le préfère lâchement à la vérité & aux lumiéres de la raison avec lesquelles bien souvent il est incompatible. Ceci a lieu sur tout à l'égard des matières obscures, douteuses ou incertaines, dans des sujets qui ne sont susceptibles tout au plus que de quelques degrés de probabilité, & où *le pour* & *le contre* sont à peu près de force égale; alors un peu de prévention, un peu d'amour propre, un intérêt tant soit peu pressant, portent l'esprit à donner son consentement, à décider sans plus d'examen, & à faire pancher la Balance du côté pour lequel on se sent le plus de disposition. Mais sur tout que ne peuvent pas sur notre esprit les préjugés de l'enfance, ceux qui tirent toute leur force de l'antiquité ou de la nouveauté, ceux qui charment l'imagination par le brillant & le specieux, en un mot tant d'autres motifs par lesquels on se détermine bien souvent sans le savoir, & par là dautant plus dangereux qu'ils ne se font

ont pas ſentir aiſément. Voilà les dangers que l'on court dans la recherche de a vérité, elle nous échappe à tous monents, tout ſemble conſpirer à nous la avir, tout paroit nous porter envie lorſque nous la poſſedons. Pour éviter ces langers & ces illuſions de l'amour prore, il n'y a qu'à étudier cette Science que nous recommandons, elle nous en nettra infailliblement à couvert, il n'y a qu'à entrer dans ce païs d'idées nouvelles, où l'on eſt en ſûreté contre l'ereur, & contre les embûches que les ennemis de la vérité dreſſent ſi ſouvent à notre eſprit pour le ſurprendre & le jeter dans l'erreur. Et pour parler ſans igure, je dis que les hommes prennent rop peu d'intérêt à des Cercles, à des Triangles, à des combinaiſons de nombres & de proportions pour être prévenus ſur de tels ſujets, ils n'ont pas une nature propre à contribuer par eux-mêmes à la felicité & au bien-être du Genre-humain; ce n'eſt que le plaiſir de connoitre, de ſavoir, de poſſeder la vérité & de s'aſſurer de cette poſſeſſion, qui puiſe faire paroitre aimables des objets de cette nature.

Dès-là, il eſt naturel de conclure qu'une

ne Science où l'on peut avancer en connoiſſances & en lumiéres ſans crainte de ſe tromper, en prenant l'évidence pour guide, en voiant de ſes propres yeux, en examinant ſoi-même, en découvrant la vérité ſans nuages, en s'affermiſſant dans l'heureuſe habitude de l'aimer pour elle-même; il eſt, dis-je, naturel de conclure qu'une telle Science eſt très utile à l'homme, qu'elle eſt digne de ſon empreſſement & de ſes recherches. Or telle eſt la Science des Mathématiques, & c'eſt là le ſecond avantage que je me propoſois de vous y faire remarquer.

Je ferai pourtant encore une réflexion à ce ſujet, avant que d'aller plus loin; c'eſt que ſi la vérité par elle-même a tant d'atraits pour nous, malgré les obſcurités dont elle eſt d'abord comme enveloppée, malgré les peines, les ſoins & les travaux qu'il faut ſe donner pour s'en aſſurer la poſſeſſion, malgré le petit nombre de choſes que nous ſommes en état de comprendre, ſi cette vérité, dis-je, nous eſt encore ſi chère & a des charmes qui nous la rendent précieuſe & ineſtimable lors même que nous ſommes ſur cette terre; que ſera-ce quand nous viendrons à découvrir ſans peine un nombre innom-
bra-

brable de vérités toujours nouvelles, qui paroitront dans tout l'éclat dont elles font fufceptibles, dont la poffeffion ne fera troublée par l'idée d'aucune traverfe, d'aucun doute, d'aucune incertitude; quand nous nous connoitrons plus particuliérement nous mêmes, notre Créateur & les ouvrages admirables auxquels il a donné l'exiftence? Tout cela eft bien propre à nous faire fentir d'une manière convaincante les avantages de la vie à venir, & par conféquent à détacher des objets fenfibles, de ces voluptés groffiéres & terreftres, qui nous attirent vers les chofes d'ici-bas, pour revêtir enfuite des fentimens plus nobles & plus dignes d'une créature immortelle, & capable d'une félicité qui n'aura point de fin dans fa durée, & qui fera d'un prix ineftimable dans fa nature & dans fes qualités. Qu'on juge encore, fi une Science capable de produire de tels effets, quand elle ne feroit recommandable qu'à ce feul égard, n'eft pas déja bien digne d'eftime, & très conforme au but, pour equel Dieu nous a placé fur cette terre, qui eft de cultiver notre raifon, d'avancer n lumiéres & en vertu, & de faire tout oncourir à ce grand but, & à cette fin prin-

principale, puiſque c'eſt en cela que conſiſte notre bonheur & notre deſtination pour toujours.

Un troiſiéme avantage des Mathématiques, c'eſt que l'on y fait un continuel uſage de ſon entendement, que l'on s'accoûtume à manier, pour ainſi dire, les idées intellectuelles, à concevoir avec facilité les matières les plus abſtraites & à comprendre ſans peine les choſes les plus difficiles. Or exercer ſon entendement, & l'appliquer ſur un ſujet auſſi vaſte & auſſi propre que celui que nous recommandons ici, c'eſt faire aſſurément de ſes facultés & de ſon tems le meilleur uſage qu'il ſoit poſſible, en fait de connoiſſances. Quand on ſe familiariſe ainſi avec les idées univerſelles, & que l'on ſe forme des notions générales ſur les matières, auxquelles on s'applique, on écarte ſans peine les ſuperfluités, on eſt exact & précis dans ſes raiſonnemens; on fait de plus grands progrès en moins de tems; une ſeule propoſition vous met au fait d'un grand nombre d'autres, au lieu que l'induction ou du moins le fréquent uſage des exemples ne fait qu'embrouiller le ſujet que l'on traite, & obſcurcir par des idées étrangè-

res

es celles qui lui appartiennent en pro-
re, à moins qu'on n'ait l'idée généra-
e & universelle assés claire & assés fa-
miliére, pour ne la pas confondre avec
quelque cas particulier.

Les hommes, pour l'ordinaire, sans le secours des Mathématiques, ou à moins d'une méditation profonde sur des sujets abstraits, sont incapables de saisir un raisonnement tant soit peu spirituel. Dès que la question qu'on leur propose, n'affecte ni leur sens ni leur imagination, ils ne savent plus où ils en sont; avec eux ils en faut venir à des recits vrais ou fabuleux, à des contes, à des projets, à des inventions, à des tours de plaisanterie, à des choses en un mot qui présentent des images sensibles, des objets grossiers & materiels; veulent-ils parler de quelque sujet, d'une manière un peu générale, ils ne peuvent l'exprimer que par des exemples: ils ne comprennent rien dans des raisonnemens abstraits, ni dans ces Démonstrations qui servent à établir des vérités universelles. Concluons donc encore à cet égard que l'étude des Mathématiques est très utile à l'esprit humain, & que les considérations que nous venons de faire sur les idées
de

de l'entendement, ſont très propres à la faire enviſager comme entiérement digne de toute perſonne qui a un déſir ſincère de connoitre la vérité, & de perfectionner les lumiéres de ſon eſprit.

Ajoûtons encore à ces prémiers avantages, ſur leſquels je me ſuis un peu étendu pour en faire mieux ſentir l'importance; ajoûtons y, dis-je, de nouvelles remarques qui iront toutes à établir cette même vérité.

On apprend dans les Mathématiques, mieux que dans toute autre Science, le grand Art de raiſonner juſte; on y fait une continuelle application des règles d'une bonne Logique, on manie aiſément ſon ſujet; on décompoſe, pour ainſi dire, ſes raiſonnemens; on examine mieux la liaiſon de ſes parties; on diſtingue l'idée moienne du ſujet & de l'attribut; on voit ce qu'il faut faire pour s'aſſurer de quelle maniére elle eſt unie aux deux termes de la propoſition qu'on examine, & ſi l'on ne met dans ſa concluſion que ce qu'il y a dans les prémiſſes, on apprend à ſuivre ſes idées, à ne pas perdre le fil d'un raiſonnement, à le pouſſer juſqu'à ce qu'on ait prouvé ce qu'on ſe propoſoit d'établir. C'eſt de ces ſecours

cours & de ces facilités que resulte la justesse de l'esprit & son exactitude, qui fait que non seulement on ne se trompe point sur des sujets susceptibles de Démonstration, mais encore sur ceux qui ne sont tout au plus que vraisemblables, parce qu'on sait assigner à chaque chose son prix, à chaque preuve sa valeur, & à chaque objection sa force & son mérite; par là encore on prévient les équivoques, & ce qui en est une suite nécessaire, on apprend l'art de bien disputer, & de terminer les controverses: car chacun sait que l'ambiguité des termes dont on se sert, aussi bien que le manque d'exactitude en général, sont la cause de leur longueur & du peu de fruit qu'on en retire pour l'ordinaire.

Mais je m'arrête ici pour faire réflexion sur un grand nombre de difficultés, qui ne manqueront pas de se présenter bien-tôt à l'esprit d'un lecteur un peu prévenu contre les Mathématiques. On dit d'abord sur l'avantage dont nous avons parlé, & qui consiste à exercer l'entendement en faisant un usage continuel des idées qu'il nous fournit, que l'on s'accoûtume tellement aux idées vagues, & que l'on prend si fort le goût des matières abstraites

tes & épineuſes, que dans les ſujets où il faut raiſonner ſur des notions déterminées, & raſſembler un grand nombre de circonſtances : un eſprit Mathématique qui a pris l'habitude de les éloigner & d'en détourner ſon attention, ſe trompera aiſément par cet endroit là. D'ailleurs, ajoûte-t-on, ces idées vagues ſont un genre d'idées très imparfaites, qui ne mènent point à la connoiſſance d'un objet entier, mais qui ne ſervent qu'à le faire connoître, par ce qu'il a de commun avec d'autres; c'eſt même une règle de Logique qu'il faut tendre au déterminé autant qu'on le peut, & les exceptions que l'on propoſe à ce ſujet ne regardent point ce dont il eſt ici queſtion. Enfin on dit que les Mathématiques, entant qu'elles donnent à l'eſprit cette exactitude, dont nous venons de parler, produiſent à ce même égard un très mauvais effet, qui ſe répand ſur toutes les autres Sciences, ſur des ſujets où il n'eſt pas néceſſaire ni même poſſible de raiſonner ni de s'exprimer avec tant de préciſion & d'exactitude. Quelle extravagance ne feroit ce point de décompoſer tous les raiſonnements, de vétiller ſur la force des preuves, de faire voir que la con-

onclusion qu'on vient de tirer, est un
peu trop générale, ou qu'un DONC est
hors de sa place, d'épeler tous les mots
que l'on entend prononcer & de les critiquer, lorsqu'on en fait une application
tant soit peu outrée. Cela seroit impertinent dans le langage ordinaire par exemple; car si même le discours, pour manquer d'exactitude, jette souvent dans l'erreur, il y a par contre une infinité de cas, où le défaut de justesse & de régularité, & où les équivoques & l'ambiguïté ne peuvent causer aucune méprise, au moins qui soit d'une grande importance.

Pour répondre à ces difficultés, je remarque prémiérement que le terme de vague est purement relatif, d'où il s'ensuit qu'une même idée peut être vague en un sens, & déterminée en un autre. Rien n'empêche donc, que l'on ne puisse soutenir avec raison que les idées que l'on acquiert dans les Mathématiques ne soient déterminées & même autant qu'il en est besoin. Car quand on veut connoitre un sujet, il n'est pas nécessaire d'en avoir une idée complette, par ce qu'il y a un grand nombre de choses auxquelles il importe peu de faire at-

tention ; au contraire il convient toujours de tenir un juſte milieu, entre le vague & le déterminé : méthode qui fait que l'on retire les avantages de l'un & de l'autre, ſans en contracter les défauts, & avantages qui conſiſtent d'un côté à apprendre un grand nombre de choſes en peu de tems, & de l'autre à connoître d'un objet tout ce qu'il eſt important d'en ſavoir pour le but qu'on ſe propoſe. C'eſt encore un ménage dont l'eſprit a toujours beſoin à cauſe de ſon imperfection & de ſon peu de capacité, que de faire des abſtractions à propos & d'écarter toutes les circonſtances qui ne vont pas au but, & qui ne ſervent à donner aucun éclairciſſement, de ſorte que le tout dépend d'un diſcernement exact, auquel l'étude des Mathématiques bien loin de s'oppoſer, y contribue extrêmement, j'oſe le dire, & ſi, après tout cela, on ſe méprend encore, c'eſt la faute de celui qui examine & non point une ſuite naturelle de cette Science, au cas qu'il s'y ſoit adonné. J'en dis de même de cette pointilleuſe critique, & de cette exactitude outrée qui eſt un abus aſſés fréquent chés les Mathématiciens ; il n'y a ſur tout qu'à prendre garde à ſoi. Voilà un moïen
ſûr

sûr d'éviter tous défauts à ce sujet. J'indiquerai cette maxime en passant; c'est qu'il faut s'accoûtumer à être aussi exact qu'on le peut, quand on parle aux autres hommes, sans faire paroitre en cela la moindre affectation, & ne jamais manifester aux autres les défauts que l'on trouve dans leur langage & dans leur raisonnement, que dans les tems, les lieux & les circonstances, où la prudence l'exige.

NEANDER. Mais d'où peut venir cet éloignement que tant de personnes ont pour les Mathématiques?

MATHESIUS. La raison n'en est pas difficile à découvrir; c'est d'une mauvaise manière de les étudier, & sur tout des obscurités & du désordre, avec lequel on traitoit autrefois cette Science. Tout le monde convient que c'étoit, il y a quelques siècles, une étude pénible & hérissée de difficultés; on s'y prenoit très mal pour la reduire en système & pour l'enseigner. On n'avoit pas encore, comme à présent, trouvé le secret de mettre en œuvre tout ce qui peut contribuer à la clarté, à l'ordre, à la précision & à la netteté; plus contents de convaincre l'esprit que de l'éclairer, & de le forcer à reconnoitre la vérité que de le persuader

par le vif ſentiment d'une évidence victorieuſe, on s'embarraſſoit ſouvent dans des circuits inutiles, on ſe forgeoit des difficultés chimériques & des myſtères profonds de ce qui n'avoit rien que de très clair. Ajoûtés à cela, l'air ſombre & réveur de la plûpart des Mathématiciens, qui en faiſoient, pour ainſi dire leur unique occupation ; on les regardoit comme des prodiges d'érudition, & l'on concluoit aiſément qu'il falloit pour réuſſir dans ce genre d'étude, avoir un génie ſupérieur & extraordinaire : on s'eſt perſuadé enſuite que des choſes ſi cachées & ſi ſublimes, ne pouvoient pas avoir une utilité proportionnée à la peine qu'il falloit ſe donner pour les apprendre : la jalouſie s'eſt miſe auſſi de la partie, on s'eſt vangé par un mépris outré & par une haine implacable, de la mortifiante illuſion où l'on étoit, de ſon impuiſſance à y réuſſir. Aujourd'hui il n'en eſt pas de même : & comme on enſeigne les Mathématiques incomparablement mieux que l'on ne faiſoit autrefois, elles commencent auſſi à avoir la vogue & à ſe remettre en réputation, le préjugé tombe, & on reconnoit qu'on a tort de les négliger. C'eſt parce que pluſieurs perſon-

ſonnes entreprennent cette étude que l'on en peut retirer des avantages très conſidérables, à cauſe que la plûpart n'y donnant qu'une partie de leur tems & les étudiant comme il convient, en retiennent tous les avantages ſans en contracter les défauts; ſi on ſe donnoit tant ſoit peu de peine pour cela, on en viendroit aiſément à bout. Mais je m'apperçois que notre entretien eſt déja bien long & qu'il eſt tems de le finir; nous continuerons la même matière à la prémiére entrevûe.

ENTRETIEN IV.

MATHESIUS.

NOus avons vû précédemment que les Mathématiques étoient propres à donner à l'eſprit le goût de l'évidence, l'amour du vrai, auſſi bien que le précieux avantage de l'exactitude, de la juſteſſe & de la pénétration. J'étens cette derniére remarque particuliérement ſur les mots, & je ſoutiens qu'une pareille étude procure infailliblement cette brié-

veté dans le difcours, cette précifion & cette force qui en doivent-être inféparables; on s'accoûtume auffi à bien définir, à prévenir par conféquent les équivoques & les mots vuides de fens; car pour l'ordinaire, le langage eft rempli de termes de cette nature, & la confufion qu'il eft capable de caufer dans les idées, doit fûrement ne fe manifefter jamais mieux que dans les Mathématiques. C'eft dans cette Science, où il eft impoffible de comprendre quoique ce foit, fi chaque objet n'a pas fon nom, fi l'on ne raifonne pas conftamment fur la même définition, fi l'on n'a pas foin de prendre toujours dans le même fens les termes dont on fe fert, fans leur donner ni plus ni moins d'étendue que celle qu'on avoit d'abord déterminé. Cela vient de ce qu'ici l'on a conçû les chofes avant que de leur donner des noms, au lieu que le commun des hommes a donné des noms avant que de bien concevoir les chofes: on fe fert de figures de Rhétorique, d'Allufions, d'Allégories, de Métaphores, toutes, manières de parler imparfaites & qui, pour le moins, manquent d'exactitude, & font capables par là même d'en impofer à l'efprit, & de le jetter dans l'er-

l'erreur. Ici par contre on va tout uniment, on ne met point en œuvre le langage des paſſions, les images pompeuſes, ni le brillant de la Déclamation. L'évidence eſt le ſeul mobile dont on ſe ſert pour perſuader & pour convaincre; on ignore l'art de faire des raiſonnemens embellis, & parés d'ornements étrangers pour les faire mieux recevoir. On n'entaſſe pas preuves ſur preuves, diſtinctions ſur diſtinctions, & ſolutions ſur ſolutions; on vous préſente la choſe telle qu'elle eſt, on la prouve tout ſimplement, & il n'y a rien de ſuperflu ni d'exagéré. Il eſt aiſé de comprendre qu'à tous ces égards, les Mathématiques ont de très grandes utilités, & il ſeroit ſuperflu de s'arrêter à les faire ſentir. Mais auſſi il n'eſt pas moins vrai, d'un autre côté, que l'on perd peu à peu le goût de l'éloquence, & que l'on deſſèche, pour ainſi dire, ſon imagination: de là vient que les Mathématiciens pour l'ordinaire ne ſavent pas ce que c'eſt que les inſinuations & les charmes d'un diſcours éloquent; qu'ils ne ſont point propres à perſuader par des motifs, beaucoup moins à toucher & à émouvoir; qu'ils ne ſont point pathétiques dans leurs

compoſitions, en un mot qu'ils n'ont pas les qualités requiſes pour un Orateur, par-là-même qu'ils ont accoûtumé de dire les choſes d'une manière crûe, ſéche & ſi conciſe, qu'on a ſouvent beaucoup de peine à les entendre. Cette difficulté renferme certainement bien du réel, & je conviens que c'eſt, de tous les déſavantages que l'on attribue à l'étude des Mathématiques, celui ſur lequel on paroit le mieux fondé. Néanmoins le mal n'eſt pas ſans remède, ni près de là; & ces remèdes ſont, pour le dire en paſſant, le commerce du monde, la converſation avec des perſonnes de différens caractères & ſur tout avec ceux qui ont de la vivacité & beaucoup d'imagination; on a auſſi des amuſemens qui recréent ſans fatiguer, on ſupplée encore à tout cela par la lecture de certains ouvrages propres à produire le même effet, c'eſt-à-dire ſur-tout, à animer, à former à un beau ſtile, à enrichir ſon imagination, & à donner à l'eſprit ce tour libre & aiſé dont les effets ſont ſouvent ſi avantageux à ceux qui les poſſédent naturellement, & qui en font un uſage convenable. Il faut de plus que ceux qui ſont nés avec un tempérament lent,

& qui manquent déja naturellement de feu & d'imagination, s'adonnent moins que les autres aux Mathématiques, & qu'ils faſſent un uſage plus fréquent des moiens que nous venons d'indiquer. Mais le principal, c'eſt de connoitre bien ce défaut; on le préviendra aiſément en faiſant des efforts ſur ſoi-même, pour ſe maintenir dans la joie & dans l'activité, en s'animant à penſer avec vivacité, en profitant de mille occaſions, & de mille circonſtances particuliéres qui ſont propres à corriger ſon naturel. C'eſt là le principal remède, quoique peut-être bien des gens trouveront que ce doit être le moins efficace: mais il n'y a qu'à en faire l'expérience, on verra ſi l'on avoit raiſon de le penſer ainſi.

On dira peut-être qu'avec tout cela on ne ſauroit être bon Orateur, & que l'on ne pouſſera jamais l'éloquence à ce point de perfection que l'on auroit pû acquérir, ſi l'on n'avoit pas étudié les Mathématiques. Cela peut être encore véritable, quoiqu'aſſurément il y ait bien des exceptions à faire. Mais que ceci ne nous porte point à renoncer à cette Science, pour conſerver un peu de vivacité & d'imagination que l'on ſeroit fa-

ché de perdre, ou de ne pas pousser encore plus loin. L'étude des Mathématiques ne nuira jamais à la véritable éloquence, tant qu'elle sera dirigée par la prudence & le bon goût: au contraire elle servira à la perfectionner: il y aura moins de brillant, mais plus de solide; moins de feu, mais plus de force & de justesse; moins de motifs, mais plus de conviction; l'imagination sera moins ébranlée, & le cœur moins agité: mais l'esprit sera plus éclairé & la persuasion plus ferme; & pourvû qu'en s'instruisant du langage de l'esprit, on n'oublie pas celui du cœur, on viendra aisément à bout de les concilier, & de s'en servir avec succès. Si les Mathématiciens en général sont d'une humeur réveuse & d'un tempérament chagrin, s'ils ont des distractions qui étonnent quelques fois, s'ils sont peu propres à commercer avec le reste des vivants, faites attention que tous ne sont pas de ce naturel, ou que ce sont des gens qui avoient déja ce penchant, & des dispositions à contracter de semblables défauts, ou que ce sont des gens qui s'y adonnent trop & qui ne savent pas se moderer dans leurs occupations, quand ils les trouvent à leur gré &

qu'elles

qu'elles leur plaifent ; ou enfin qui ne prennent pas toutes les précautions convenables pour fe garantir des effets de ces mauvaifes habitudes. Ces caufes concourent très fouvent pour les produire, mais une feule fufit prefque toujours, & c'eft auffi ce qui rend le mal beaucoup plus confidérable, & beaucoup plus fréquent.

Quand je fais attention au plaifir que l'on trouve à découvrir des vérités certaines & évidentes, dignes par-là d'être l'objet de notre empreffement & de nos recherches les plus paffionnées, je ne peux qu'être furpris de ce qu'il fe trouve des Mathématiciens d'un naturel fombre & chagrin; il me femble qu'ils devroient être tous les plus contents, les plus gais & les plus actifs de tous les hommes, & ils feroient tels affurément, s'ils dirigeoient bien leurs études, & s'ils avoient les difpofitions néceffaires pour le faire avec fuccès. Enfin le cœur fait toujours mieux s'ouvrir les routes qui lui conviennent, que l'efprit celles qui lui font propres. Les fentimens qui le touchent & qui fervent à l'émouvoir font plus naturels que celui de l'évidence & de la Démonftration. Par conféquent il n'eft

pas à présumer que s'étant mis en opposition, ceux dont les impressions sont beaucoup plus foibles, l'emportent sur les autres. Et d'ailleurs pour un mal que l'on trouvera, n'y a-t-il pas cent remèdes, pour ainsi dire, à y apporter: ils tirent même de leur varicté une nouvelle force pour le détruire.

Mais supposons que l'imagination y perde beaucoup; & quand ce seroit à ses dépends que l'on devroit acheter les avantages que les Mathématiques nous procurent, seroient-ils mis à trop haut prix; au moins à coup sûr, cette étude ne vous enlévera pas radicalement la faculté d'imaginer, elle ne vous dépouillera pas de toute votre éloquence, & si elle vous empêche d'aspirer à la gloire d'Orateur, vous conserverés pourtant encore l'art de vous exprimer juste, quoique d'une manière moins belle & moins touchante. Je sais qu'il y a des occasions où les simples motifs & la Déclamation sont plus nécessaires que les preuves les plus fortes & les Démonstrations les plus convaincantes. Mais outre que l'esprit & le cœur ne sont pas deux choses si diférentes, & que ce prémier étant bien persuadé, manque rare-

ment

ment d'entrainer le second, j'ai encore cette remarque à faire, c'est qu'il vaut mieux préferer une raison éclairée & un esprit bien cultivé au projet hazardeux & souvent téméraire de faire plusieurs essais d'une imagination brillante, & d'une éloquence qui charme, mais qui est sujette aussi à donner dans des écarts bien funestes & des travers dangereux, tout au moins à se faire illusion à soi-même ou aux autres. Un peu moins d'éloquence & un peu plus de jugement, un peu moins d'imagination & un peu plus de cervelle, c'est ce qu'il convient d'avoir, & qui est préférable au talent de savoir persuader bien ou mal, le vrai comme le faux, & le certain comme ce qui ne l'est pas.

Je viens à un nouvel avantage des Mathématiques, & je ne l'appelle proprement nouveau que parce qu'il consiste dans l'heureux mêlange de l'exactitude & de la pénétration; car nous avons déja parlé de l'une & l'autre de ces deux qualités, sur tout de la prémiére. Pour se convaincre de ceci, il n'y a qu'à faire attention, que, dans ces sortes de matières, on peut laisser à l'esprit une plus grande liberté de se donner l'effort, & de

de faire uſage de ſes propres forces, parce que l'erreur n'y eſt pas ſi dangereuſe, & qu'après s'en être apperçu, ce qui ne peut manquer d'arriver, rien n'eſt plus aiſé que de la corriger; on peut laiſſer, pour ainſi dire, à l'entendement un champ plus libre, parce que s'il vient à s'égarer, il peut de lui-même ſe remettre au bon chemin, & ſe conduire ſans autre guide. On a de plus l'avantage de voir naître les conſéquences de leurs principes, de remarquer ce qui doit s'enſuivre de certaines propoſitions; on cherche ce qu'il faudroit faire pour venir à bout d'une Démonſtration; on paſſe tout à coup en revûe ce dont on peut avoir beſoin; on s'en ſaiſit avec adreſſe; on démêle parmi un grand nombre d'idées qui ſe préſentent, celles qui peuvent convenir au ſujet, on découvre comment il faudroit s'en ſervir, & de quelle manière on devroit les combiner pour arriver à la concluſion qu'on ſe propoſe d'établir; on entre dans l'eſprit de l'Auteur qu'on lit, on découvre ſes vûes, ſon plan, ſa méthode, & les raiſons qu'il a euës de s'étendre plus ou loin, de s'arrêter ſur telles & telles circonſtances, de paſſer légérement ſur d'autres, & de s'ex-

s'exprimer comme il a fait. C'eſt en cela que conſiſte la pénétration, c'eſt-à-dire la facilité de faire un juſte choix des idées dont on a beſoin; par où l'on voit que j'exclus ici la fauſſe pénétration & que je ne définis que la véritable, & c'eſt auſſi cette véritable qui s'acquiert incomparablement mieux dans les Mathématiques que dans toute autre ſcience. En effet, à quoi ſert une pénétration ſans exactitude? elle aboutit à former avec facilité un tas de conjectures qui ne ſervent à rien, & à découvrir ce que peut-être, il n'importe point de ſavoir; de même l'exactitude ſans la pénétration, eſt une ſcrupuleuſe peſanteur d'eſprit qui ſe donne bien des mouvemens, pour ne rien avancer.

On a donc tout lieu de ſe promettre que les Mathématiques rendent ceux qui s'y appliquent pénétrants & exacts, qu'elles les forment à l'eſprit d'invention & les mettent en état de tout entreprendre. Cependant on éleve encore de nouvelles plaintes contre les Mathématiques; on dit qu'elles rendent ceux qui s'y appliquent, plus amateurs du ſubtil que du ſolide. A quoi bon, ajoûtent-ils, ces fines Théories où l'on s'éleve ſi haut &

où l'on court après de vaines possibilités qui n'auront jamais d'existence? de quelle utilité sont ces problèmes artificieusement composés, qui demandent des peines infinies, si on les veut resoudre, & encore plus, lorsqu'on entreprend de les découvrir? Quelle n'est pas la folie des hommes de chercher toujours de nouvelles proprietés dans les nombres, dans les lignes, dans le mouvement, dans le cours des astres &c. de se torturer l'esprit pour inventer quelque nouvelle courbe, quelque figure d'un nouveau genre? Quel peu de jugement que de consacrer à cette étude des années entiéres, des travaux rudes & pénibles, des veilles laborieuses, & cela pendant qu'on a tant de choses à apprendre, pendant qu'on doit connoitre la Théologie, s'occuper de l'étude de la Morale, de la Jurisprudence, de l'Histoire, de la Physique, de la Médecine & de toutes ces sciences en un mot, où sans s'amuser à de vaines spéculations on va d'abord à ce qui est utile, & qui peut être de quelque avantage pour la societé? Quelqu'un étalera encore ici les divers besoins de la vie humaine & les occupations particulières auxquelles il faut donner une bonne

bonne partie de son tems. L'homme, dira-t-on, est plus fait pour agir que pour connoitre; & s'il doit sacrifier ses intérêts au bien de la societé, à combien plus forte raison devra-t-il faire le sacrifice d'une étude qui ne fait que le distraire, & qui est si peu avantageuse aux autres hommes. On acquerra, je le suppose, de la pénétration & de la force d'esprit, on fera d'admirables découvertes, mais plus admirables qu'utiles, plus pénibles à trouver qu'importantes à découvrir, vérités dont on se passe sans peine, pendant qu'on néglige celles dont les besoins journaliers & continuels influent sur le bien de la societé. Cela seroit pardonnable, si on se contentoit d'y donner quelques moments de loisir, & si l'on n'y consacroit que quelques heures, mais d'en faire son capital, sa principale & pour ainsi dire, son unique occupation, c'est ce que l'on ne peut faire sans se rendre extrêmement condamnable: & que l'on ne dise pas qu'on peut se moderer dans cette étude & n'y donner qu'une partie de son tems, c'est ce qu'il n'est pas facile d'observer. Quand on aime une science avec passion, on s'y laisse aller, on s'y adonne

tout entier, & dès qu'on veut s'appliquer à d'autres choses, tout paroit fade, tout paroit insipide, sur-tout dans les Mathématiques, où l'on n'a point de ces difficultés mortifiantes, & de ces mystères profonds & impénétrable comme dans la Théologie, point de reproches de la part de sa conscience comme dans la Morale, point de ces controverses & de ces disputes ennuieuses comme dans les autres sciences. C'est là où l'esprit se contente à son aise, & où, sans que le cœur se gène, ni que les passions en souffrent, on travaille avec plaisir & avec contentement; de sorte qu'il est bien difficile de se moderer dans une telle étude, & de ne pas s'y livrer totalement. Ce sont là de nouvelles objections que l'on fait contre l'étude des Mathématiques; il est important de les resoudre & d'en faire voir le peu de réalité.

J'avoue qu'il ne faut pas se livrer trop à cette étude, & qu'il est même très aisé d'en abuser à cet égard; je conviens encore qu'elle renferme bien des choses plus curieuses qu'utiles, & des Théories qui ne sont d'aucun usage pour la pratique. Je ne saurois m'empêcher de

de reconnoitre l'avantage de certaines ſciences ſur les Mathématiques, comme la Théologie, la Morale, l'étude du cœur humain & quelques autres. Mais malgré les aveux que je viens de faire, je ſuis bien éloigné pourtant d'admettre l'objection dans toute ſa force, & d'en tirer la même concluſion. En effet, on ne ſauroit conteſter que les Mathématiques ne ſoient l'étude la plus propre pour acquerir le rare talent de l'invention; on y fait des progrès étonnants, on y découvre des choſes qui ſembloient ſurpaſſer pour toujours la capacité de l'eſprit humain; & cet eſprit inventif, cet eſprit exact & pénétrant, quand on le tranſporte dans les autres ſciences, n'eſt-il pas d'un grand ſécours pour y travailler avec ſuccès. Mais les Mathématiques ne fervent pas ſeulement d'une manière indirecte à contribuer à l'avancement des ſciences, elles ſont encore d'une néceſſité indiſpenſable pour l'étude de la Phyſique, de l'Aſtronomie, de l'Architecture, des Machines, du Toiſé, des Fortifications & d'un grand nombre d'autres choſes de cette nature qui ſont ſi utiles à la ſocieté. Quel avantage en particulier ne retire-t-on pas dans le

commerce & dans toutes les affaires de la vie civile, de l'Arithmétique qui en fait une partie considérable, & dont les utilités sont si généralement connues? Ces Théories sublimes sur l'inutilité desquelles on se recrie, servent ordinairement à démontrer d'autres Propositions qui conduisent enfin à quelque chose d'important. Je suis même très persuadé, qu'à la reserve de l'étude des choses saintes, & de celles où l'on est obligé indispensablement par sa vocation, on n'en sauroit entreprendre aucune qui soit plus utile, plus digne de l'homme, plus convenable à sa nature, plus propre à le dégouter des choses sensibles, & à le porter à l'esprit de travail, de recueillement & de tranquillité, que l'étude des Mathématiques. D'ailleurs où est la science qui n'ait pas ses defauts? Etudie-t-on la Théologie? On se trouve souvent disposé à inventer des systèmes dangereux, à former des doutes sur la révélation, sur la Providence, & sur les attributs même de la Divinité; on ne se livre que trop aisément à un zèle aveugle, à des préjugés de Secte, à un esprit de controverse & de chicane. Etudie-t-on la Morale? on s'accoûtume pour

l'or-

l'ordinaire à regarder d'une manière spéculative, une ſcience qui doit être toute pratique, à en reduire les préceptes & les règles en ſyſtème pour les preſcrire aux autres, ſans en uſer ſoi-même; on y contracte aiſément un eſprit de ſuperſtition, d'une ſévérité exceſſive, & d'une critique impitoiable ſur les défauts d'autrui. Dans l'étude de la Juriſprudence civile, on apprend à être ami de la chicane, à aimer la diſpute, à ſoutenir le faux comme le vrai, le douteux comme le certain, à reſpecter l'intérêt plûtôt que ce qui eſt juſte & équitable, à faire céder l'amour de l'évidence à celui du gain & de l'avarice. Parcourés les autres ſciences de la même manière, & vous verrés que dans chacune on peut y trouver autant de défauts, & même beaucoup plus que dans les Mathématiques, autant d'abus qui ſont poſſibles, autant de précautions à prendre. Puis donc que toutes les ſciences ont leurs défauts & leurs mauvais côtés, & que les Mathématiques offrent à l'eſprit de ſi grands avantages, il eſt aiſé de voir que l'on ne ſauroit mieux faire, que de les entreprendre & de les continuer même toute ſa vie. C'eſt ce qui paroitra encore

core d'une manière plus ſenſible après que vous aurés vû les autres avantages des Mathématiques, que nous n'avons pas encore rapporté, ſur leſquels je ne m'étendrai pas beaucoup & dont je vous entretiendrai dans un diſcours ſuivant.

NEANDER. Vous me donnés un déſir toujours plus fort de me vouër à une choſe dont vous me promettés de ſi grands avantages, & il n'y a que l'importance de vos remarques Préliminaires qui ſoit capable de moderer cette ardeur.

MATHESIUS. Vous devés être perſuadé que mon deſſein n'eſt pas de vous traîner en longueur, & que ſi je ne croiois pas les remarques que je fais aſſés utiles pour mériter d'être préferées préſentement à l'examen du ſujet principal, je ne m'y étendrois pas ſi fort. Mais j'ai crû tout-à-fait convenable de vous donner au moins une idée générale des principaux avantages que les Mathématiques nous procurent, & de toucher en paſſant ceux des autres ſciences avec les défauts qui ont de coûtume de s'y rencontrer, & les abus qu'on en peut faire. Vous apprendrés toujours par là quelles qualités & quelles diſpoſitions d'eſprit il faut avoir pour avancer en connoiſ-

noiſſances, à quel genre d'étude il faut s'attacher principalement, quel but on doit ſe propoſer en étudiant, & les précautions qu'il convient de prendre pour le faire avec ſuccès. Tout cela mérite aſſurément qu'on y faſſe quelque réflexion, & que l'on ne quitte pas ſi-tôt un ſujet de cette importance.

NEANDER. J'en ſuis très perſuadé & je crois qu'il ſeroit autant à ſouhaiter que l'on donnât à certaines queſtions préliminaires, toute l'étendue qu'elles doivent avoir, qu'il le ſeroit qu'on paſſât ſous ſilence un grand nombre d'autres qui ne font qu'embarraſſer & qui ne diſpoſent point l'eſprit à mieux recevoir les inſtructions principales qu'on ſe propoſe de lui donner.

MATHESIUS. C'étoit là préciſement le défaut des Anciens Scholaſtiques; ils auroient cru commettre une faute capitale, s'ils étoient entré d'abord en matière. Les ſept ou huit prémiers chapitres de leurs ouvrages rouloient ſur des *Prolegomenes*, ſur des *Précognita* & d'autres préambules de cette nature auſſi ennuieux qu'inutiles, qui n'aboutiſſoient à rien autre, qu'à ſe conformer à l'uſage & à prolonger le diſcours. Il y par con-

contre ; des Auteurs modernes qui se sont jettés dans une extrêmité oppofée ; ils ont banni de leurs difcours tous ces Exordes, toutes ces entrées & ces détours qui amufoient le lecteur & pouvoient le retarder : il ont trouvé à propos de le mettre d'abord au fait du fujet dont il s'agiffoit. Il eft certain que l'on peut pécher très fouvent à cet égard, & il y a des occafions où il convient de ne pas entrer fur le champ en matière, mais de difpofer l'efprit du lecteur & de le préparer à recevoir ce qu'on veut lui faire entendre. Pour moi fans vouloit me jetter dans l'une ou l'autre de ces extrémités, ni même fans chercher trop fcrupuleufement un jufte milieu, je dis qu'il faut que la prudence & la raifon nous dictent ce que nous avons à faire là-deffus, tant pour le choix des matières que pour l'étendue qu'on doit donner à ces préliminaires dont nous parlons. On ne fauroit prefcrire ici des règles générales, parce qu'il y a trop de chofes qui peuvent faire varier ces méthodes là ; il faut alors y fupléer par le difcernement, en préférant le bon goût à la coûtume, & la raifon à l'ufage établi. On n'a pas befoin dans ce cas là de

de formules pour se conduire & pour se guider, & de plus, rien n'est si aisé que d'en faire une fausse application.

NEANDER. Cela est vrai & rien ne me paroit plus raisonnable. Mais l'heure nous appelle autre part, sur tout vous qui avés des occupations dans ce tems-ci.

MATHESIUS. J'ai de plus, quantité de petites affaires à expédier qui ne nous permettront pas de nous voir demain. Mais dans deux jours nous pourrons recommencer, c'est-à-dire que nous continuerons après demain à la même heure, si vous le trouvés à propos.

NEANDER. Je ne manquerai pas de m'y trouver comme de coûtume.

ENTRETIEN V.

MATHESIUS.

JE crois que tous ceux qui ont quelque teinture des Mathématiques sont très persuadés, que c'est de toutes les sciences, celle qui peut être le plus aisément reduite en systême, qui est la plus

susceptible d'un arrangement méthodique & suivi, dans laquelle on puisse trouver plus de moiens pour en écarter le superflu & l'inutile, & pour reduire les propositions que l'on y traite à une simplicité & un ordre achevé. On peut aussi faire toujours de nouvelles découvertes, & inventer des méthodes nouvelles pour perfectionner la liaison de ces diverses parties, & les enchainer pour ainsi dire, les unes aux autres. Mais si vous demandés à un Auteur qui écrira sur un tout autre sujet, pourquoi il a placé telle ou telle réflexion avant une autre, pour l'ordinaire il sera embarrassé d'y répondre, le hazard ou certaines dispositions d'esprit en ont décidé: & souvent ce n'est qu'après avoir composé, que l'on est en état de rendre raison de son plan & de sa méthode. Quand il s'agit de Mathématiques, il n'en est pas de même, on y est obligé & même forcé, pour ainsi dire, & la liaison naturelle que ses parties ont entr'elles, fait que l'on est mieux en état de sentir ce qui doit suivre de ce qui a été établi, & de décider avec plus de justesse quelle place doit tenir une certaine proposition. Vous voiés par là que les Mathématiques

ques sont extrêmement propres à former au goût de l'ordre & à diriger l'esprit, dans la route qu'il doit suivre pour composer un systême ou un traité, quel que ce puisse être. Et tout concourt dans cette science pour produire cet effet, l'évidence des sujets que l'on y traite, leur simplicité, leur netteté, leur liaison, & enfin l'exactitude avec laquelle il faut se conduire en tout ce que l'on y entreprend. Il est vrai que dans la Logique on donne des règles pour la méthode, puisque une partie même toute entiére des ouvrages qui en traitent, est destinée à cela uniquement; mais aussi dans les Mathématiques, on fait un usage perpetuel de ces règles; ce n'est pas assés de les connoitre par Théorie, il faut trouver des sujets propres à en faire une application convenable, & c'est justement ce qu'il y a de plus difficile; car rien de plus aisé que de donner des conseils vagues & généraux sur ce sujet, mais par contre rien ne l'est moins que de s'en bien servir & d'en acquerir l'habitude. Un ouvrage tant mal compilé soit-il, & tant mauvaise que soit la méthode avec laquelle l'Auteur traite son sujet, il est pourtant toujours en

quelque façon intelligible, & pourvû qu'il y ait une espèce d'arrangement, on en est quitte pour le comprendre à moitié & pour s'en former en gros quelques idées confuses, au lieu qu'un livre de Mathématiques fagotté de la sorte seroit tout-à-fait obscur & on n'y pourroit point profiter, ce qui sans doute est un plus grand avantage que de charger sa mémoire de choses qui n'auroient ni ordre ni méthode.

Mais, dira-t-on, peut-être, combien ne voit-on pas de Mathématiciens que l'on accuse avec raison de manquer d'ordre dans leurs ouvrages, comme le sont quelques uns des anciens Géometres ou Algebristes Modernes? Comment peut-on dire que les Mathématiques supposent nécessairement une méthode exacte & scrupuleuse, puis qu'on est bien venu à bout de les entendre, quoi qu'à la vérité avec affés de peine? Je repons à cela qu'il faut distinguer soigneusement deux sortes de Méthodes. La prémiére ainsi proprement dite consiste à suivre ces régles que l'on donne dans la Logique, Méthode sans laquelle on ne pourra jamais rien comprendre dans les Mathématiques, & qui doit nécessairement s'y trou-

trouver, mais qui peut ne pas se rencontrer dans les autres sciences, d'où résulte la confusion dans les idées, & souvent même diverses erreurs. L'autre sorte de méthode, sans être entiérement nécessaire pour l'intelligence des sujets que l'on étudie, ne laisse pas de donner à l'esprit une grande facilité à les comprendre, & à le mettre en état de faire beaucoup plus de progrès en moins de tems : c'est encore à cette derniére que l'étude des Mathématiques contribue avantageusement, & à laquelle elle forme plus que toute autre. Car quoique sans ordre on ne puisse pas venir à bout des Mathématiques, on ne sauroit pourtant disconvenir que cette méthode judicieuse, cet arrangement particulier, qui fait que deux Auteurs varient lorsqu'ils suivent le même plan, que cet arrangement, dis-je, ne soit nécessaire aux Mathématiques pour en faciliter l'intelligence, quand même absolument parlant, on pourroit s'en passer. Mais pour l'ordinaire le terme de méthode se prend dans le prémier sens que je viens d'indiquer, & par cette raison aussi, je vous ai dit que sans méthode on ne pouvoit rien entreprendre dans les Mathématiques.

Cette étude a encore l'avantage d fournir à l'esprit un grand nombre d'idées avec la facilité de les comparer & de se les rendre présentes en même tems, c'est en cela que consiste l'étendue de l'esprit. En effet, il faut rappeller un grand nombre de propositions que l'on a vûes auparavant pour prouver ce qui va suivre. Il faut par conséquent se les rendre familiéres, & avoir acquis l'habitude de les faire naître aisément & de les rapeller de même quand il en est besoin. Enfin pour connoitre la force d'une Démonstration, il faut sentir toutes ces idées en même tems, ou du moins pouvoir les parcourir avec beaucoup de rapidité, & que de plus, ces idées soient toutes claires & distinctes. Ceci nous conduit encore à dire que les Mathématiques servent à l'attention, mais à une attention soutenue, dont il ne peut se faire qu'on ne contracte l'habitude. C'est ce qui se vérifie dans cette science, sur tout par rapport à la pratique, c'est-à-dire à l'égard des Problèmes que l'on veut résoudre: car une seule inadvertence oblige à tout recommencer, & dans un long calcul, si l'on vient à se tromper, ne fut-ce qu'à la derniére opération, c'est

c'est-à-peu près comme si on n'avoit rien opéré, & souvent même il est besoin d'une plus grande attention qu'auparavant, parce que d'un côté on s'obstine aisément, à vouloir reparer sa faute sur le champ, & l'on est déja fatigué par la premiére opération ; & de l'autre, outre que l'on ne sait pas dans quel endroit, l'erreur doit se trouver, il est facile de retomber par là, dans la même inadvertance : car pour le dire en passant, chacun sait que dans un calcul Arithmétique par exemple où l'on se sera trompé, si on le réitere, en s'y prenant à peu près de la même façon, il est facile de retomber plusieurs fois dans cette erreur, parce que les signes & les caractères qui se sont présentés à l'imagination, & ensuite de la combinaison desquels on a supposé une certaine liaison dans les idées qu'ils doivent représenter, ces caractères, dis-je, se représentant ainsi de nouveau, il est naturel de faire la même supposition : de là vient que si elle se trouve fausse, on se trouve disposé à la faire autant de fois, que les signes de ces idées se trouvent combinés de la même manière. Il faut donc pour cela un plus grand effort d'attention. De

plus, la crainte de retomber dans une nouvelle méprise, qui peut avoir lieu aussi facilement dans la seconde entreprise que dans la première, engage à redoubler l'attention & à y ajoûter de nouvelles forces.

D'ailleurs les Mathématiques fournissent de très beaux sujets pour exercer son attention. On a des exemples frappans de plusieurs Mathématiciens qui sont venus à bout des calculs les plus composés, sans autre secours que celui de leur esprit & de leur mémoire. La raison de cette aptitude à former à l'attention, est que les idées Mathématiques sont très difficiles à combiner, parce qu'on n'y est pas accoûtumé; qu'il en faut cependant comparer un grand nombre pour s'assurer de la vérité d'une proposition, qu'il faut par là même se les rendre extrêmement familiéres & en réïterer l'assemblage plusieurs fois & en plusieurs maniéres; ce sont là des moiens très efficaces pour fixer son attention & pour la fortifier.

NEANDER. Vous ne trouverés pas mauvais que je fasse une petite remarque sur ce sujet, qui paroit contraire à ce que vous venés de dire.

MA-

MATHESIUS. Voions ce que c'eſt: je vous écouterai avec plaiſir.

NEANDER. Quand vous mettés l'attention au nombre des avantages que les Mathématiques procurent à l'eſprit, il me ſemble que ceci ne doit s'entendre tout au plus que par rapport aux Mathématiques mêmes, & que dans les autres ſciences, cette étude peut cauſer plus de mal que de bien. Voici ſur quoi je me fonde; c'eſt que dans les Mathématiques, on eſt tellement obligé de donner ſon attention à chaque idée en particulier, que c'eſt plûtôt la borner que l'étendre. En effet, l'attention conſiſte à pouvoir ſe repréſenter aiſément & en même tems un grand nombre d'idées; or quand on ſe trouve ſur des ſujets plus connus & moins difficiles, il ſemble qu'on doit avoir contracté le pli de cette lenteur avec laquelle on s'eſt accoûtumé à ſuivre ſes idées: à peu près comme il arrive au corps humain quand ſes membres ont été long-tems ſerrés & qu'ils viennent enſuite à être deliés, ils ſe reſſentent encore quelque tems de leur prémier engourdiſſement. Que ſi d'un autre côté on veut aller trop vite, & ſe donner carrière, pour ainſi dire, on riſ-

que d'aller plus loin qu'il ne faut & de se méprendre ; on s'est désaccoûtumé à sentir le simple d'une prémière vûe ; & à force d'appliquer son attention sur des choses évidentes, il faut les considérer long tems avant que de les pouvoir comprendre. En un mot il me paroit que l'on doit contracter par-là, l'habitude de réünir toutes les forces de son esprit sur une seule propôsition, & de ne savoir pas la partager à propos entre un grand nombre d'idées en même tems. De là vient, si je ne me trompe, que les Mathématiciens passent ordinairement pour être lents & distraits. C'est là une réflexion que je faisois l'autre jour, & j'attendois pour vous la communiquer que l'occasion s'en présentât.

MATHESIUS. Votre remarque est très judicieuse, & la difficulté que vous faites a quelque chose de spécieux. Mais je crois qu'avec tout cela on peut y répondre solidement. Je vous ferai voir que tout ce qui est nécessaire pour soutenir son attention, se rencontre dans l'étude des Mathématiques : or je prétens, & on ne sauroit le contester qu'il faut se rendre d'abord deux idées bien familiéres avant que de passer à une troi-

troisiéme, car à moins de sentir cette liaison, l'idée composée qui sera un assemblage de ces idées partiales, pourra effectivement n'en admettre pas de certaines que l'on y supposera, & cela, faute d'avoir assés examiné. C'est là l'origine & la source de toutes les méprises, & il vaut infiniment mieux se faire à cette exactitude, que de vouloir voltiger, pour ainsi dire d'idées en idées, pour éviter le reproche de pesanteur d'esprit. Mais on fait tout le contraire, c'est la vivacité de l'esprit qui devance le plus souvent l'examen, & l'on aime mieux se tromper en allant vite, que de s'assurer du vrai en se modérant un peu.

L'esprit, dites-vous, est gêné dans sa route, il ne va qu'avec peine d'une idée à l'autre, il ramasse toute la force de son attention pour la fixer sur une seule, & il ne peut la partager sur divers sujets à la fois. Cela est vrai, mais c'est des commençans que l'on peut dire cela, c'est quand il en est besoin, c'est quand on ne pourroit aller plus vite qu'au risque de se méprendre. Dans la suite il n'en sauroit être de même; c'est alors que l'on promène son attention avec rapidité, & bien loin de perdre la facilité

de voir ce qui est simple, on n'a au contraire qu'à y jetter le moindre regard pour s'appercevoir de tout ce qu'il est, & cela ne nuit point à la fécondité d'idées, au contraire il y contribue extrèmement, parce qu'on n'a pas besoin de s'arrêter sur le simple que l'on comprend d'une seule vûe à cause qu'on se l'est rendu bien familier; on en apperçoit aussi très aisément les liaisons & les rapports. J'avoüe que si l'on ne s'anime pas à faire des efforts sur soi-même, il se pourra faire que l'on contractera cet engourdissement d'esprit dont vous parlés, aussi faut-il prévenir cet inconvénient, tant par les précautions que j'ai déja indiquées, que par des actes réitérés d'une volonté constante: ce qui est le remède le plus efficace. On voit encore, dites-vous, des Mathématiciens fort distraits. Mais où la distraction ne se fait-elle pas remarquer? Est-ce seulement à ces personnes que le titre de distrait convient? Ce n'est pas cela, dites-vous, ils le sont beaucoup plus que les autres. Et quand cela seroit, il faudroit toujours s'assurer, s'ils prennent bien toutes les précautions convenables pour s'en garantir, à supposer
même

même que leur étude les y conduise naturellement. Ils ne feroient pas distraits, s'ils le vouloient sérieusement. D'ailleurs il se peut très bien que quelques uns le fassent par affectation, pour faire croire aux autres qu'ils sont tout occupés de leurs profondes méditations & de leurs importantes recherches. D'autres le font, quand ils ont la tête comme remplie de propositions difficiles, & dont la solution les intéresse. D'autres ne peuvent loger dans leur cerveau qu'une seule science à la fois, & leur distraction n'est autre chose qu'une incapacité plus ou moins grande de recevoir d'autres idées que celles qu'ils ont déja : d'autres, parce qu'ils s'y livrent trop & qu'ils ne pensent presque à autre chose. D'autres enfin parce que leurs distractions sont toutes relevées avec empressement. Toutes ces causes réunies & peut-être un plus grand nombre d'autres, ont pû faire croire que les Mathématiques rendent l'esprit plus distrait qu'attentif, & qu'on ne devoit pas s'y attacher, ne fut-ce que par cette seule raison.

Voilà ce que j'avois à dire sur les avantages des Mathématiques, & sur les grandes utilités qu'elles peuvent nous pro-

procurer. Ce devroit donc être selon moi, vous imaginerés-vous, une science incomparable, si au moins tous ces éloges lui conviennent. Toutes fois l'expérience ne semble pas d'abord justifier les raisonnemens dont je me suis servi à ce sujet. J'ai dit que les Mathématiques étoient au dessus de toute méprise, & que cette science étoit à l'abri des erreurs & des controverses. Cependant la dispute sur les points Mathématiques, celle qu'on a sur les infiniment petits, sur l'angle de contact, sur les prétendues démonstrations de la quadrature du cercle & du mouvement perpétuel; toutes ces choses semblent déposer contre moi, & prouver le contraire de ce que je me proposois d'établir. Quoi que j'aie déja répondu à cette objection, & que je la propose de nouveau, je crois qu'il ne sera pas inutile d'en dire encore quelquelque chose, & d'y ajoûter de nouvelles remarques: je répons donc à cela, qu'on peut toujours quand on le veut, se disputer & se méprendre; que l'on peut se dérober, pour ainsi dire, aux vérités les plus claires & les plus convaincantes, que l'on soumet, quand on le trouve à propos, sa raison & son bon sens

à

à l'empire des passions & des préjugés. Faudra-t-il à cause de cela appeller une science douteuse & incertaine? Tout ce qui est l'objet des Mathématiques doit être clair & évident, fondé sur des idées nettes & distinctes. Celui, par exemple, qui s'avise de chercher la centiéme partie d'un infini, de tâcher à découvrir l'origine d'un Angle, & ce qu'il est à sa naissance, ou si l'on vouloit chercher des égalités là où il n'y en a point ni n'y en peut avoir; enfin si l'on avoit formé le dessein d'extravaguer en fait de Mathématiques, auroit-on bonne grace de mettre toutes ces illusions sur le compte de cette science. De plus je soutiens, ou que ces sortes de controverses ne sont pas l'objet propre des Mathématiques, ou qu'à supposer qu'ils en soient véritablement, si l'on veut retrancher cette partie des Mathématiques du total, à quoi je consens très-volontiers, on sera toujours fondé à dire que c'est une science certaine, & au dessus de toute méprise, parce que les erreurs où l'on tombe, sont si manifestes & si aisées à corriger, que c'est uniquement la faute de ceux qui s'y laissent aller.

Je ne saurois me dispenser de parler

ici d'un avantage particulier des Mathématiques pour la jeunesse. Rien n'est plus propre pour cultiver leur raison de bonne heure, pour leur inspirer l'amour du travail; pour les tirer de cette distraction si naturelle & si ordinaire à leur âge, pour les fixer & les arrêter sur un même sujet, & par là pour prévenir une infinité d'occasions d'acquerir des habitudes funestes & dangereuses. Cela vaut incomparablement mieux, de charger leur mémoire de choses où ils ne voient goûte, de les accoûtumer à prendre l'obscurité pour guide, & l'authorité pour maîtresse de leur assentiment. C'est dans cette étude qu'ils apprendront à respecter l'évidence, à juger des choses par goût & par réflexion. On ne sauroit la leur faire commencer trop de bonne heure, mais avec la précaution sur tout de ne point les contraindre, de la leur faire envisager comme un divertissement, de leur repasser ce qu'ils ont appris un grand nombre de fois, de le leur rendre extrêmement familier, & pour le dire en passant, il n'y a point de science où les repétitions fassent le moins de peine, au contraire elles procurent toujours

jours un plaisir nouveau. Il vaut donc mieux, sur tout à l'égard des enfans, leur faire repasser plus de fois, & leur donner peu à apprendre dans chaque leçon. Il ne faut pas attendre qu'ils commencent à s'y ennuier, & que la vigueur de leur attention baisse. Il faut leur choisir des livres faits exprès pour eux, des livres pleins de clarté, de netteté, de simplicité & de force; des livres qui contiennent un grand nombre d'exemples, qui prouvent une même proposition en plusieurs manières & qui proposent les choses sous diverses faces, & dans un point de vûe facile & naturel. On ne doit leur enseigner d'abord que l'essentiel, les faire raisonner sur ce qu'ils ont appris, leur enseigner à en faire des extraits plus ou moins étendus, à s'exprimer exactement & avec facilité, sans verbiage & sans détour. C'est enfin dans cet âge, où l'on se contente plus aisément du simple que du composé, où l'on a plus de tems de perfectionner ses idées, & de les graver fortement dans l'esprit; on acquerra alors des habitudes heureuses, & cela sera d'autant plus facile, que les enfans prennent aisément le pli qu'on veut bien leur donner quand

on

on sait s'y prendre adroitement : au lieu que ceux qui sont dans un âge plus avancé, veulent entreprendre trop de choses à la fois : de là vient que leur impatience est souvent cause qu'ils réussissent très mal dans cette étude, & qu'ils n'en tirent pas de grandes utilités; mais cependant, comme l'on dit, il vaut mieux tard que jamais. On remarque encore que les Mathématiques s'oublient très aisément : cela vient de ce qu'on ne se les est pas rendues assés familiéres, & on ne se les est pas rendues assés familiéres parce que ces idées ne reviennent dans l'esprit que quand on les rappelle par la méditation ; ce ne sont pas des sujets sensibles & dont on s'entretienne ordinairement. Tel par exemple qui croit savoir une Démonstration sur le bout du doigt, & qui se propose hardiment de la rappeller, se trouve arrêté tout court par une absence d'idées qu'il croioit en sa disposition. D'autres ont fait un cours d'Algèbre, par exemple, très imparfaitement sur un seul Auteur dont ils ont extrait un Compend tant bien que mal. Ces gens-là au bout de quelques années savent encore par cœur quelques propositions dont ils se servent
&

& qu'ils rappellent pour en prouver ensuite d'autres; ils savent faire quelques citations hazardées qui viennent quelques fois à leur réussir; mais tirés les de leur routine, les voilà en païs nouveau, ils ne savent plus où ils en sont.

Vous devés être persuadé qu'une mauvaise manière d'étudier les Mathématiques fait un très grand tort à l'esprit, que rien n'est plus rare que de les bien enseigner & de les apprendre comme il faut. Quand ces deux grands moiens viennent à manquer, on perd plus de tems qu'on ne fait de profit, & il vaudroit infiniment mieux les laisser là que d'en entreprendre l'étude. Il n'est pas moins certain qu'en apprenant les Mathématiques avec toutes ces précautions, il faut un tems inconcevable, on avance très peu, c'est ce qu'il est important de se bien mettre dans l'esprit, & c'est là aussi la grande raison pour laquelle les Mathématiciens de profession ne tirent pas ordinairement de cette science tous les avantages dont nous avons parlé; car dans une science aussi vaste qu'est celle-là, si l'on vouloit s'arrêter scrupuleusement sur chaque sujet, la vie la plus longue ne suffiroit pas pour en posséder seulement la plus gran-

grande partie ; aussi on se hâte, & par conséquent on va trop vite. Mais par contre l'on ne profite pas autant à beaucoup près que ceux, qui, sans aspirer à la gloire d'être illustres dans cette profession, ne se mettent pas en peine de faire un peu de tout, mais de se rendre propre & comme naturel, tout ce dont ils entreprennent l'étude. Un Mathématicien du prémier ordre, ne viendra jamais à bout de s'exprimer avec toute l'étendue, la clarté, la netteté & l'évidence de celui qui s'est fait une loi de n'avancer que peu, mais d'acquerir des connoissances exactes & solides, & qui en même tems s'est voué à d'autres occupations d'un genre tout différent.

Je me rappelle vous avoir dit que la méthode ordinaire de traiter les Mathématiques, c'est d'en faire un corps Systématique, où les propositions se démontrent les unes par les autres : mais je ne voudrois pas m'en servir uniquement; car il est vrai que plus les conséquenquences sont près des principes d'où elles naissent, & mieux on sera en état d'en appercevoir la liaison, & de voir pourquoi une chose a une certaine propriété plûtôt que d'autres. Un autre incon-

convénient, c'eſt que cela engage ſouvent à des répétitions inutiles ; une même propoſition paroît cinq ou ſix fois ſous des tours & ſous des enveloppes différentes, ou bien on fera pluſieurs Théorêmes de ce qui peut être regardé comme autant de corollaires d'une même propoſition. On appelle, comme vous le ſavés, cette manière d'enſeigner, la voie Synthétique. L'autre qui eſt la voie Analytique conſiſte à décompoſer un ſujet, à en examiner chaque partie ſéparément, pour qu'en les raſſemblant on puiſſe voir de qu'elle manière elles doivent convenir entr'elles, en faiſant attention à certaines règles que l'on donne pour cela. Cette manière de démontrer eſt excellente, mais par contre elle demande plus de peine & d'application que l'autre : elle a pourtant encore l'avantage, d'ouvrir de grandes routes, & de reduire à un petit nombre un tas de propoſitions, dont la véritable intelligence ne dépend bien ſouvent que d'une ſeule. C'eſt alors que l'on eſt en état de pénétrer, pour ainſi dire, les replis les plus cachés d'une ſcience, c'eſt par cette méthode qu'on éclaire le plus ſon eſprit, & qu'on peut s'aſſurer ſi on comprend

ef-

effectivement, ou si l'on ne fait qu'acquiescer à une conclusion, de la nécessité de laquelle on n'étoit pas convaincu avec assés de clarté & d'évidence. Cependant il importe de réunir ces deux méthodes pour tirer de chacune ce qu'il y aura de meilleur & de plus convenable. C'est ce que nous allons faire dans nos Entretiens Mathématiques où il est bien-tôt tems d'entrer. Nous tacherons de ne suivre d'autre route pour cela que celle que le bon sens voudra bien nous montrer, mais sur tout de ne rien dire dont nous n'aions l'un & l'autre des idées bien distinctes, nous commencerons donc dès à présent à entrer en matiere. Ce sont les Elémens d'Algèbre que je me propose de vous expliquer, au moins ceux qui me paroitront les plus intéressans & les plus dignes de ce nom.

ENTRETIEN VI.

MATHESIUS.

L'Objet des Mathématiques, c'est la grandeur ou la quantité en gé éral.

C'est

C'eſt-à-dire tout ce qui eſt ſuſceptible d'augmentation & de diminution, ce qui eſt capable du plus & du moins, ce qui eſt fini entant que fini, ce qui a des parties; tout ce donc qui peut être augmenté & diminué, tout ce dont on peut ôter quelque choſe, ſans qu'il ceſſe pour cela d'exiſter, s'appelle quantité, & conſidéré comme tel, il eſt l'objet de la ſcience dont nous parlons, ainſi nous pouvons dire que les Mathématiques ſont la ſcience des grandeurs entant que grandeurs.

Et d'abord il faut diſtinguer ici l'objet que l'on ſuppoſe être une grandeur, de l'idée que l'on ſe forme de cet objet; car il n'eſt pas néceſſaire pour connoitre les grandeurs ou les quantités, avec leurs divers rapports, qu'il y ait au dehors de nous des objets qui répondent à nos idées; nous nous rendrons donc ſeulement attentifs à ces repréſentations de quelque choſe qui eſt grand, & à qui l'on donne le nom de quantité, ſans nous embarraſſer s'il y a des êtres différens de nous, que ces repréſentations nous faſſent connoitre, ou s'il n'y en a point. De cette manière les Mathématiques ont un fondement ſolide & des mieux

mieux assûrés, puisque l'on peut trouver en soi, c'est-à-dire, dans ses idées de quoi établir les propositions que l'on y démontre. Ainsi la science de la grandeur ce sera un système de vérités démontrées sur les quantités quelques qu'elles puissent être, & sur les divers rapports qu'elles ont entr'elles.

Je reviens à la définition de quantité pour vous en donner des exemples. Quand je parle d'un son qui est plus ou moins foible, d'une force triple ou quadruple d'une autre, d'un bâton qui a plusieurs pieds de haut, de deux corps égaux, de pésanteurs inégales, d'une grande vitesse, d'une extrême lenteur, d'un mouvement rapide; quand je parle de toutes ces choses, & même d'un plus grand nombre d'autres, je m'apperçois aisément, que dans toutes je suppose quelque quantité, quelque chose qui peut venir plus ou moins grand qu'il n'étoit auparavant, qui par conséquent est renfermé dans certaines bornes au delà desquelles il ne s'étend pas actuellement. Si l'on a donc une idée qui renferme en soi plusieurs représentations, & que l'on puisse en ajoûter de nouvelles ou enôter de celles qui y étoient déja: cette idée considérée ainsi

in abstracto est la représentation d'un objet fini, c'est-à-dire d'une quantité. Quand j'ai l'idée de six hommes, par exemple, cette idée contient des représentations qui peuvent être séparées, & je sens de plus que l'idée de la possibilité d'unir ou de séparer les parties que cette prémière contient, s'accorde avec cette même prémière.

Neander. Mais quand j'attribue à une boule du mouvement, de la pesanteur, de la dureté, de la blancheur &c. pourra-t-on dire que cette boule en devienne plus grande quand j'y concevrai un plus grand nombre d'attributs.

Mathesius. Non, on ne le dira pas, parce qu'on n'unit pas à l'idée vague de la boule, celles que vous venés d'indiquer entant simplement qu'elles peuvent être unies ou séparées, on les regarde plus particuliérement comme des qualités ou des manières d'être; mais si on ne les consideroit que comme des attributs entant qu'attributs, on diroit alors qu'il y en a quatre, ou cinq, ou un plus grand nombre & ce seroit par-là même une quantité.

Il y a certaines idées qui sont propres à exciter plus immédiatement celles de

quantité ou de grandeur, & l'on fait autant de genres ou d'espèces de grandeurs qu'il y a de ces sortes d'idées. Par exemple, l'idée de l'étendue suppose une continuïté de parties différentes les unes des autres qui se touchent toutes immédiatement; par contre, il y a des parties qu'on regarde comme approchées ou comme éloignées indifféremment; il y en a que l'on conçoit exister les unes après les autres & successivement, comme le tems, le son, le mouvement &c. Mais de quelque manière qu'on les conçoive, elles reviennent toujours à cette idée universelle, que c'est un tout dont on considére les parties entant que séparables les unes des autres, & capables d'en recevoir de nouvelles; ainsi l'on ne fait pas attention, si ces parties sont proches où éloignées, si elles existent en même tems ou bien les unes après les autres, si elles sont semblables ou différentes; en un mot c'est un tout, où l'on n'a égard qu'aux parties qui le composent, sans faire attention, ni à leur nature, ni à la manière dont elles concourent pour le former, puisqu'on les regarde toutes sous une même idée générale.

Quelquefois on a deux ou plusieurs idées

idées auxquelles le nom de quantité peut convenir, mais à cause qu'elles sont trop déterminées, pour pouvoir en composer une seule sans séparer certaines représentations que l'on ne veut pas désunir; on dit que ce sont des grandeurs hétérogènes. Par exemple, j'ai l'idée d'une ligne comme d'un assemblage d'autres petites lignes qui se touchent toutes, & qui suivent la même direction comme seroit celle-ci A B; & en même tems je conçois un tout formé par un assemblage de plusieurs hommes: il est clair alors que ces deux idées sont trop déterminées pour en composer une troisiéme qui appartienne à la quantité de l'une ou de l'autre espèce, il faudroit pour cela ôter de part ou d'autre certaines représentations, & ne conserver que celles qui seroient communes à l'une & à l'autre de ces deux sortes de grandeurs, parce que dans ce cas, l'assemblage seroit formé par des parties que l'on regarderoit toutes de la même façon. Mais une ligne & un nombre d'hommes ne font pas une plus grande ligne ni un plus grand nombre d'hommes. Que si à présent on parloit de six points & de cinq hommes, & qu'on ôtat des idées de point & d'homme, tou-

tes les repréſentations qui n'empêcheroient pas qu'on ne pût enviſager l'une & l'autre de la même manière entant que parties d'un ſeul tout, ce ſeroient alors des grandeurs homogènes, c'eſt à-dire de même eſpèce, au lieu qu'elles ſont toujours hétérogènes quand il s'agit d'un tout dont les parties, c'eſt-à-dire, les idées que l'on en a, ne peuvent être reduites à une même idée générale qu'en les rendant plus ou moins déterminées qu'elles n'étoient auparavant. Ce que je viens de dire ſur les grandeurs homogènes & hétérogènes, n'eſt point contraire à l'idée que je vous ai donnée de la quantité, à cauſe que je parlois de la grandeur en général où l'on ne conſidère les parties qu'entant que parties: car il eſt certain que deux mêmes quantités peuvent être dans un ſens hétérogènes & dans un autre homogènes, ce ne ſont donc pas des qualités abſolues, mais relatives, & qui ne dépendent que d'une ſimple manière de concevoir.

NEANDER. Vous m'avés défini ce que c'eſt que la grandeur, mais voions, je vous prie, ce que vous entendés préciſément par qualité.

MATHESIUS. L'idée de qualité eſt une

une idée générale que l'on a d'une chose ou d'un tout entant que déterminé d'une certaine façon, par l'arrangement & l'union de ses parties; ainsi les qualités du corps sont la figure, la situation, le repos ou le mouvement, la dureté &c. L'arrangement d'une chose, c'est cette chose elle même disposée d'une certaine maniére, & il dépend des diverses combinaisons dont ces parties sont susceptibles, & qui se rencontrent dans un seul tout. La qualité c'est le resultat de l'union des parties entant qu'elles sont unies; & la quantité, c'est le résultat des parties entant que parties & indépendamment de leur union. Vous devés comprendre par là, quelle est la différence de ces deux choses, & ce en quoi elles conviennent.

Je viens à présent à la comparaison de ces touts & de ces parties les unes par rapport aux autres. On voit d'abord que ces mots de tout & de partie sont entiérement relatifs, car une même chose peut être regardée comme un assemblage, c'est-à-dire comme un tout, & en même tems comme partie d'un autre assemblage. Nous ne connoissons point d'objet qui soit entiérement sim-

ple, & nous ne formons pas non plus des repréſentations qui ſoient abſolument unes; mais nous pouvons faire abſtraction, ou, ſi vous voulés, ne point enviſager les parties qui entrent dans la compoſition d'une autre partie, & la regarder comme ſi effectivement elle n'en avoit aucunes. Cette manière de conſiderer les grandeurs, les fait appeller *unes* ou *unités*. L'unité c'eſt donc une grandeur aux parties de laquelle on ne fait pas attention, on la dit particuliérement *une* quand on la conſidére comme un tout, ſans la regarder comme partie d'un autre aſſemblage, & *unité* quand c'eſt une partie ſimple d'un tout que l'on a en vûe. Ainſi je dirai, un cercle, un triangle, un homme quand je prens ces ſujets dans leur totalité; or conſidérés comme des touts, on n'a point d'égard à la nature de leurs parties quelques qu'elles puiſſent être, & que ſoit leur union. De ſorte que les Termes *d'un* & de *tout* ſont à peu près ſynonimes, excepté, qu'on appelleroit un; quelque objet abſolument ſimple, au lieu que le terme de tout ne pourroit pas lui convenir. Pour les unités, ce ſont des parties que l'on regarde comme ſimples, & qui compa-

parées entr'elles ne doivent point être conçûes différer en quantité, quoique par la définition que nous en avons donnée, elles puissent réellement être inégales. L'unité borne donc en quelque manière, cette succession indéfinie que nous concevons des parties qui sont composées les unes des autres. Car quand je cherche les parties d'un tout ou d'une grandeur, comme je puis encore concevoir de nouvelles parties dans ces prémières, & ainsi de suite, il est naturel de ne pas faire attention à ces secondes parties, mais de considérer les prémières tout comme si elle n'en avoient point, on appellera donc dans ce cas là, *unités* chacune de ces parties rélativement au prémier tout dont elles sont parties, & le tout ou l'assemblage d'unités, s'appelle *nombre*: mais il faut pour cela que ce qui fait qu'on appelle plusieurs grandeurs unités, se trouve le même dans chacune: ainsi le nombre est un assemblage de mêmes unités. Or les unités de divers genres, ne peuvent pas être ajoûtées ni retranchées les unes des autres, parce que ce qui fait qu'on les appelle unités, n'est pas quelque chose de commun à toutes: j'éclaircirai ceci par un exemple facile.

Supposons que sur un papier l'on ait douze figures de Geometrie, sept triangles, trois quarrés, & deux Cercles, si je considère chacune de ces figures simplement comme figure, alors chacune fera partie de cet assemblage, & sera l'unité du nombre douze; ce seront des mêmes unités; c'est pour cela que je dis qu'il y a douze figures. Mais si le tout dont je cherche les parties doit être composé de figures circulaires, ce qui fait que j'appelle ces grandeurs *unités*, ne se trouve pas le même dans chacune, parce qu'il ne se trouve ni dans les quarrés ni dans les Triangles; & mon nombre sera reduit par là à deux unités. Souvent on compare les unités de divers genres par rapport à la quantité, & alors il est clair que ce sont des unités différentes quand elles sont inégales, ainsi on ne dira pas que deux pistoles soient autant que deux francs, & on ne pourra pas les ajoûter pour en faire le nombre quatre, tant que l'on conservera les mêmes idées de deux pistoles & de deux francs. Il est aisé de voir par là, que ce qui est nombre en un sens, peut être unité dans un autre sens; que les mêmes unités peuvent être regardées comme unités de mê-

me

me genre, ou comme unités de divers genres ; & que tout cela dépend des diverses manières de concevoir les grandeurs. Je vois encore que le nombre détermine l'idée de multitude ou de pluralité, qui en elle même est beaucoup plus vague & plus confuse ; que l'unité est le principe & pour ainsi dire la racine des nombres ; que *deux* étant le plus petit assemblage d'unités, doit être aussi regardé comme le prémier nombre ; que les nombres pris d'une manière générale & indéterminée, savoir l'unité pour une grandeur quelconque ; peuvent être continuellement augmentés, sans qu'on puisse y trouver aucunes bornes ; que l'unité prise dans ce sens vague & abstrait & considérée d'abord comme simple peut être aussi regardée comme un nombre, & renfermer autant de parties qu'on voudra, dont chacune sera regardée comme unité ; de sorte que soit en montant depuis l'unité à un nombre, soit en descendant depuis cette même unité considerée alors comme nombre, aux parties qu'elle peut contenir entant que grandeur, on a toujours une suite infinie de nombres, c'est-à-dire à laquelle on ne peut assigner aucunes bornes. Il n'en est pas de même

lorſque l'on prend pour unité une grandeur non ſimplement entant que grandeur, mais qu'on la détermine d'une maniére plus poſitive ; alors on ne peut pas ajoûter quelle grandeur que ce ſoit pour unité de ce nombre, ſur tout lorſque l'on veut ſavoir combien il y a d'unités dans un tout fini. Car ſi, par exemple, je voulois compter une armée de ſoldats, il faudroit que je priſſe un ſoldat pour l'unité, alors toute repréſentation qui ſera diſtincte d'une autre, mais à laquelle je pourrai appliquer l'idée vague de ſoldat, ſera unité de ce nombre là. Que s'il y avoit des gens de pluſieurs nations, l'idée devenant plus déterminée, on ſent bien que le nombre ne ſeroit pas ſi grand. On ne compare donc les unités d'un nombre, qu'entant que ce ſont des unités d'un certain genre, comme dans cet exemple je ne fais aucune attention à la grandeur, à l'habillement, au Païs &c. de chaque individu, il ſuffit que l'idée de ſoldat puiſſe leur convenir à tous ſans exception.

La quantité n'eſt pas une de ces choſes qui ſe connoiſſent par elles mêmes : il faut néceſſairement pour ſavoir ce qu'elle eſt, la comparer avec une autre

que

que l'on regarde comme l'unité, & s'assûrer ainsi du nombre des parties qu'elle contient : quand on veut comparer deux grandeurs, on se sert de la même unité, & l'on parvient ainsi à connoitre distinctement leur rapport, mais c'est ce dont nous aurons occasion de parler fort au long dans la suite. On doit voir par là que les nombres sont si déterminés, que l'addition d'une seule unité fait un autre nombre, parce que ce n'est plus le même assemblage précisément; d'où il s'ensuit encore très clairement que deux ou plusieurs nombres ajoûtés ensemble font un nombre.

Lorsque comparant diverses grandeurs entant que grandeurs nous ne concevons dans l'une quoique ce soit que nous ne concevions aussi dans les autres, cette ressemblance d'idées s'appelle égalité, & les grandeurs qui sont telles sont dites égales. Cette définition suppose manifestement que deux grandeurs égales, en un sens, peuvent être inégales en un autre, & que les nombres sont des touts composés de parties égales entr'elles. Nous verrons bientôt la vérité de plusieurs axiomes que l'on a sur les égalités des grandeurs; mais auparavant il faudra ex-

pliquer quelles ſont les deux prémières vérités que toutes les autres ſuppoſent & qui ont lieu dans toutes les ſciences : nous ferons auſſi quelques réflexions ſur leur univerſalité & ſur leur évidence. C'eſt à quoi je deſtine un autre diſcours, & je finirai celui-ci par remarquer que le rapport d'égalité étant le plus ſimple de tous, c'eſt celui auquel on fait le plus d'attention dans les Mathématiques : en effet les rapports d'inégalités peuvent varier à l'infini, & quand on connoit une grandeur, on ne peut pas ſavoir celles qui ſont plus grandes ou plus petites qu'elle, à cauſe que le plus ou le moins dont elles différent n'eſt pas déterminé ; par contre, quand on connoit une grandeur on connoit par conſéquent de la même manière, toutes celles qui lui ſont égales. Vous pourrés repaſſer ce que vous venés d'entendre & tâcher de vous le rendre bien familier, car cela eſt très néceſſaire ſur tout dans les commencemens.

EN-

ENTRETIEN VII.

MATHESIUS.

ON a été fort en peine de savoir quel étoit le prémier de tous les axiomes, & la vérité la plus générale dont toutes les autres dépendent ; en un mot le plus simple de tous les principes. Pour moi je trouve la chose tout à fait exempte de difficultés, & je vois sans peine que ce doit être cette proposition-ci : *Il ne se peut faire qu'une chose, soit & ne soit pas en même tems* : toute personne qui veut admettre quelque vérité que ce puisse être, suppose certainement celle-ci ; & si quelqu'un s'avisoit de la révoquer en doute, il seroit impossible de le faire convenir de rien ; car dès qu'il vous aura accordé un principe, il ne se fera aucune peine de le nier & de l'admettre en même tems, il sera convaincu de vos raisons, il en doutera, il les refutera même s'il le trouve à propos ; le moien par conséquent de l'amener à quelque conclusion ? Si je prens le senti-

ment

ment de mon exiſtence pour le prémier fondement de la certitude, il ſuppoſe encore cette même vérité dont nous parlons, c'eſt que ſi j'exiſte, il eſt faux que je n'exiſte point; on ne ſauroit donc diſconvenir que ce ne ſoit ici le prémier axiome, & une vérité fondamentale dont toutes les autres tirent leur force & leur évidence. Mais ſurtout c'eſt le principe d'une démonſtration, car ſans lui, envain auriés vous fait voir auſſi clair que le jour que le contraire de votre propoſition ne peut qu'être contradictoire; on vous répondroit tranquillement, qu'une choſe pouvant être, & ne pas être en même tems, ce que vous avancés ne ſauroit être regardé comme certain. Admirons encore la force de cette vérité, qu'il eſt impoſſible de trahir, de quelle manière que l'on s'y prenne: car ſi l'on dit qu'une choſe peut être & n'être pas en même tems, on ſuppoſe par conſéquent, que le contraire de cette propoſition eſt faux; & ſi on les admet toutes deux quoi qu'oppoſées, il ſemble toujours qu'on exclut ce qui y eſt oppoſé. Enfin de quelle manière que l'on s'y prenne, il ſe trouve que l'on eſt obligé d'admettre cette vérité

même

même dont on voudroit ébranler la certitude. Il est vrai pourtant que si c'est la plus simple & la plus universelle de toutes les vérités, ce n'est pas celle qui nous est venue la prémière dans l'esprit, & sur laquelle nous aions d'abord réfléchi, mais toujours en avons nous supposé la force & la réalité, & c'est aussi ce que nous faisons dans tous nos discours & tous nos raisonnemens. Une autre vérité qui suit immédiatement de celle-ci, ou plûtôt le second axiome, c'est cette proposition si connue de tout le monde: *Le néant n'a aucune proprieté;* car qui dit rien, suppose un éloignement de toute réalité; si donc l'on attribuoit quelque chose au néant, on oteroit toute réalité & en même tems on en admettroit quelqu'une; c'est-à-dire que pour que cela fût, il faudroit qu'une même chose existât & n'existât pas en même tems, contre le prémier Axiome. Voilà les deux vérités les plus générales, & qui ont lieu par conséquent dans toutes les sciences; nous allons à ceux-ci en ajoûter de plus particuliers, & qui ne regardent proprement que les Mathématiques. Le prémier qui se présente c'est, *qu'une grandeur est égale à elle même*, cela veut

veut dire que l'idée que l'on a d'une grandeur, n'est pas différente de ce qu'elle est tant qu'on la conserve; car si elle étoit différente, elle seroit & ne seroit pas en même tems, ce qui est contradictoire. Il n'est presque pas nécessaire d'avertir qu'un même objet peut être regardé tantôt plus grand & tantôt plus petit: & que dans ce sens on peut dire sans absurdité, qu'une grandeur n'est pas égale à elle même. 2°. *Le tout est égal à toutes ses parties prises ensemble, & il est plus grand qu'aucune d'entr'elles prises séparément.* Nous avons vû que dans les quantités on ne faisoit attention qu'aux parties d'un tout en tant que parties, & nullement à leur union non plus qu'à leurs qualités; or dans un tout on ne considère que ses parties & leur arrangement; prenant donc les parties d'un tout, on a la quantité du tout, c'est-à-dire que le tout est égal à ses parties prises ensemble. Il est bien clair encore que dans le tout, puisque chaque partie contribue à l'augmentation de la quantité, il y a quelque chose dans le tout qui ne se trouve pas dans la partie, & il n'y a rien dans la partie qui ne se trouve dans le tout, donc encore le tout

est

eſt plus grand qu'aucune de ſes parties. 3°. *Deux grandeurs égales à une troiſiéme ſont égales entr'elles*; la raiſon de cela eſt que la troiſiéme eſt la quantité de la prémière & de la ſeconde; or cette troiſiéme eſt égale à elle même par le prémier axiome, il n'y a donc rien dans la prémière qui ne ſe trouve dans la ſeconde, & rien dans la ſeconde qui ne ſe trouve dans la prémière: donc la prémière & la ſeconde ſont égales. Si l'on ſuppoſe qu'elles ſoient inégales, & qu'il y ait par conſéquent dans l'une quelque choſe qui ne ſe trouve pas dans l'autre, il faut ou qu'elles ne ſoient pas égales à une même troiſiéme, ou que cette troiſiéme ne ſoit pas égale à elle-même; mais on ne peut dire ni l'un ni l'autre ſans contradiction, donc &c. Soit $a = c$ & $b = c$ il faut prouver que $a = b$, j'ai déterminé la quantité de a, par la quantité de c, & la quantité de b auſſi par la même c, je n'ai mis donc dans b, ni plus ni moins que dans a, ainſi $a = b$ s. 4°. *Ajoûtant ou retranchant des grandeurs égales d'autres égales, les ſommes ou reſtes ſeront égaux.* Soient pluſieurs grandeurs égales $a = b = c = d = e = f$ &c. Si l'on ajoûte à chacune de ces grandeurs

deurs une même quantité, elles ne peuvent qu'être encore égales, parce qu'il n'y aura rien dans une d'entr'elles, qui ne se trouve dans toutes les autres; en effet ce qui les rendroit inégales ne pouroit être que ce qu'on leur a ajoûté, & ce qu'on leur a ajoûté étant le même par tout, les grandeurs ne peuvent qu'être égales. De même en est-il si on retranche, on laisse à chaque grandeur la même quantité, on n'ôte pas plus ou moins de l'une, que de quelle autre que ce soit; & comme avant que d'avoir retranché, on ne pouvoit prendre aucune partie dans une grandeur qui ne se trouvat dans toutes les autres, de même en sera-t-il après le retranchement. Si le contraire avoit lieu, cela ne pourroit venir que de la partie retranchée; mais comme elle l'est de chacune des quantité, ce ne peut pas être celle là, ce ne sera donc d'aucune autre, sans quoi il auroit été faux de dire qu'elles étoient égales, avant qu'on eut rien ôté. 5°. *Ajoûtant des grandeurs égales à des inégales, les sommes sont inégales, plus grandes si elles étoient plus grandes, plus petites, si plus petites; de même en retranchant.* Ce qu'il y a dans les unes & qui ne se trouve pas dans

les

les autres n'eſt pas ôté par cette addition, parce qu'on ajoûte à chacune la même grandeur. Si donc elles étoient plus grandes, elles reſteroient plus grandes, préciſément de la même différence, & ſi elles étoient plus petites elles reſteroient plus petites ; car ſi on leur a ajoûté quelque choſe, on a fait la même addition aux plus grandes : là où il y a même addition par tout, c'eſt comme ſi on n'avoit rien ajoûté, quand on veut voir les inégalités de pluſieurs grandeurs. La même choſe eſt aiſée à prouver quand il s'agit de retrancher. 6°. *Les moitiés, les tiers, les quarts &c. de grandeurs égales ſont égales, de même leurs doubles, leurs triples, leurs quadruples &c.* Un nombre de grandeurs égales étant donné, ſi on les diviſe toutes en un même nombre de parties égales, chacune de ces parties ſera égale aux autres parties ; car ſi l'une ne l'étoit pas, la grandeur dont elle ſeroit partie, ne pourroit l'être aux autres contre la ſuppoſition, puiſque cette partie devroit être priſe autant de fois pour égaler ſon tout, & à chaque fois qu'on la prendroit on feroit une ſomme plus grande que celles des autres aliquotes ; priſes donc autant de fois on auroit

roit deux touts inégaux, il eſt aiſé auſſi de ſentir que la même choſe doit convenir aux doubles & aux triples des grandeurs égales, car deux nombres qui ont autant de parties égales l'un que l'autre ſont égaux. Vous ferés peut-être ſurpris que je m'attache à vous prouver des vérités auſſi ſenſibles, mais je ne crois pas la choſe inutile, & je vous en ai déja inſinué les raiſons dans nos Entretiens précédents. Quand on conſidère une grandeur comme unité ou comme aſſemblage d'unités, ou ſimplement comme un tout, on lui donne le nom d'incomplexe; celle au contraire où l'on diſtingue pluſieurs parties égales ou inégales dans l'idée que l'on s'en forme, & que l'on regarde ces parties comme compoſées elles-mêmes d'autres parties, elle s'appelle complexe ou multinome; les parties de ce multinome ſont dites être ſes termes, & il reçoit divers noms ſuivant le nombre des parties qu'il contient, ſavoir *Binome* quand il y a deux termes, *Trinome* quand il y en a trois, *Quadrinome*, *Quintinome* &c. Si l'on ajoûte pluſieurs grandeurs les unes aux autres, cette opération ſe nomme *Addition* : la grandeur qui reſulte de l'aſſemblage, c'eſt la ſom-

ſomme, & les quantités dont elle eſt compoſée, ſont les grandeurs ou nombres à ajoûter. Un aſſemblage de grandeurs égales ſe nomme *produit* quand on a pris préciſément autant de fois une grandeur que l'on conçevoit de parties dans un certain tout. L'opération qui conſiſte à les aſſembler, s'appelle *multiplication*. La grandeur qui elle ou ſes égales, ce qui revient au même, eſt priſe pluſieurs fois, c'eſt *le multiplié*; enfin ce tout ou ce nombre, au quel on a fait attention pour prendre le multiplié autant de fois qu'on y concevoit de parties ou d'unités, c'eſt le *multipliant*. L'un & l'autre, ſavoir *le multiplié & le multipliant* ce ſont les deux facteurs: ainſi multiplier deux grandeurs, c'eſt prendre l'une autant de fois que l'on conçoit d'unités dans une autre. De cette définition ſe peuvent déduire les corollaires ſuivants. 1°. Que les nombres ſont des produits de l'unité par ce nombre lui même dont les facteurs ſont par conſéquent ce nombre & l'unité, car c'eſt un aſſemblage de grandeurs égales par la définition de nombre, & comme on ne çonçoit pour ainſi dire, qu'une ſeule partie dans l'unité, on ne doit prendre auſſi ce nombre

bre qu'une fois. 2°. Deux produits sont égaux quand ils ont chacun les mêmes facteurs : ou ce qui revient au même, des grandeurs égales multipliées par d'autres égales sont égales ; c'est ce qu'on a vû dans le sixiéme Axiome, & que l'on peut encore éclaircir en passant ; soient les facteurs a & b du produit ab les facteurs c & d de cd & les facteurs m & n de mn ; puisque $a = c = m$ & que $b = d = n$, les produits ab, cd mn, sont aussi égaux ; car des grandeurs égales prises le même nombre de fois sont égales ; en effet, il n'y avoit rien dans l'une auparavant qui ne se trouvat dans toutes les autres, & quand on prend chacune le même nombre de fois, on ne met jamais plus dans une somme que dans l'autre, & il y en a la même quantité ; le plus ou le moins ne se peut rencontrer que dans les grandeurs ajoûtées, ou dans le nombre des additions, mais à ces deux égards, il n'y a rien dans une grandeur que l'on ne fasse dans les autres : donc l'inégalité ne pouvant s'y rencontrer, il faut que ces sommes de grandeurs égales ou ces produits soient égaux. 3°. L'unité multiplié par elle-même c'est l'unité : à proprement parler ce n'est

n'eſt pas une multiplication, il n'y a dans ceci aucune difficulté, quoiqu'il paroiſſe d'abord un paradoxe à ceux qui n'y font pas attention; tout le miſtère conſiſte en ce que l'unité priſe une fois, c'eſt l'unité; & prendre l'unité une fois c'eſt prendre l'unité tout ſimplement, ſans y rien ajoûter ni diminuer; de même, un nombre multiplié par l'unité, c'eſt une grandeur entiére, & quand on n'a fait que la prendre en la laiſſant telle qu'elle eſt, on la prend une fois, on la multiplie par un; c'eſt ce qui fait dire que l'unité ce multiplie point, & effectivement ne n'eſt pas une multiplication dans le ſens auquel on a de coûtume de prendre ce terme; mais le produit augmente toujours, comme il eſt évident quand le ſecond facteur eſt un nombre; car alors le prémier eſt pris pluſieurs fois; ainſi quelque qu'il puiſſe être il devient plus grand. 4°. On voit auſſi que la valeur d'un produit dépend de celle de l'un & de l'autre des facteurs, car pour deux produits égaux, il ne ſuffit pas que les multipliés le ſoient, ils doivent encore être pris chacun le même nombre de fois comme nous l'avons vû ci-deſſus; & deux grandeurs inégales priſes chacune le même

me nombre de fois donnent des produits inégaux ; mais des grandeurs inégales peuvent avoir des multipliants inégaux d'une telle façon, que le plus grand *multiplié* se trouve pris moins de fois que le second précisément à proportion de ce qu'il surpasse l'autre en grandeur; comme par exemple, soient les deux produits ad & mn, que $a = 6m$, alors il faudra par contre que $n = 6d$, c'est-à dire que si le prémier *multiplié* est sextuple du second, le second *multipliant* soit sextuple du prémier; car il est bien clair que le second *multiplié* doit être pris plus de fois pour égaler le prémier produit qu'il n'a fallu prendre de fois le prémier *multiplié*, & parce qu'ici $a = 6m$ toutes les fois que l'on prendra a on prendra 6 fois m; prenant donc a 10 fois, on prend six fois la valeur de m, 10 fois; afin donc que l'on ait 10 a prémier produit, il faut prendre d'abord le second *multiplié* 10 fois, ce qui ne fait pas le prémier produit; il est clair que ces dix m doivent être pris 6 fois, parce que quand on aura 10 m ce nombre de fois, chaque m sera pris 6 fois, & comme il y a 10 m, on aura 10 fois le sextuple de m, c'est-à-dire 10 a valeur du prémier produit.

5°.

5°. Quand on multiplie *a* par *b*, on prend chaque partie de *a* autant de fois qu'il y en a en *b*; car prendre un tout plusieurs fois, c'est prendre chaque partie le même nombre de fois. Aussi quand je multiplie *a* par *b* je prens la grandeur *a* autant de fois qu'il se trouve de parties dans *b*; de sorte que si *a* & *b* sont des binomes, chaque partie de *a* se trouve multipliée par chaque partie de *b*, & il y a autant de produits partiaux que d'unités dans le produit du nombre des termes du prémier facteur par le nombre des termes du second: par exemple soit *a*, un quintinome & *b* un quadrinome, le produit *ab* sera composé de 20 produits partiaux; car puisque *a* a cinq parties, chacune de ces parties se trouve prise autant de fois qu'on en suppose dans *b*, il y aura donc autant de produits partiaux du prémier terme de la grandeur *a* par la grandeur *b*, qu'il y a de termes dans *b*; & comme chacun de ces termes est multiplié par *b*, il est pris autant de fois qu'il y a d'unités dans le prémier terme de *b*, autant qu'il y en a dans le second, dans le troisiéme &c. donc tous les termes de *a* seront pris chacun autant de fois qu'il y a de termes

dans b : c'eſt-à-dire que le nombre des produits des termes de a par ceux de b, ſera le produit des deux nombres qui expriment combien de termes il y a dans l'un & dans l'autre des multinomes a & b, facteurs de cette multiplication; ce qu'il falloit démontrer.

Il faut obſerver que quand nous parlons ici des termes d'un multinome, nous ſuppoſons que le nombre de ces termes eſt tel, que chacun renferme préciſément un certain nombre d'unités, ſans quoi il y auroit des fractions dont nous n'avons pas encore parlé; par exemple ſoit b qui vaut 20 unités, ſi j'en fais un quadrinome dont les termes ſoient $6+8+4+2$, j'ai alors pour chaque terme un nombre de ces unités, dont je conçois que b eſt compoſé; mais ſi dans $b=20$ je concevois plus de termes qu'il n'y a d'unités, ou bien que ce fût un trinome dont les termes duſſent être égaux, alors il y auroit des fractions, & l'un de ces termes ne contiendroit pas préciſément une ou pluſieurs de ces premières unités, & il faudroit les regarder comme compoſées, & les diviſer en fractions. Il eſt vrai pourtant qu'en Algèbre on ne fait pas attention, ſi ce ſont des nom-

nombres entiers ou des fractions, parce que chaque unité est une grandeur dont les ſubdiviſions ne finiſſent point, puiſqu'on les regarde comme des grandeurs en général. 6°. Si j'ajoûte, ou que je retranche l'unité du multipliant, j'ai le produit plus ou moins le multiplié; & ſi j'ajoûte ou je retranche l'unité du multiplié, j'ai encore le produit plus ou moins le multiplicateur: car le multiplié augmentant de l'unité, cette unité ſe trouve priſe autant de fois que le multiplicateur en contient, & voilà le multiplicateur; ſi on la retranche, elle eſt retranchée le même nombre de fois, il faut donc ôter la même grandeur &c. de même en ſera-t-il pour l'autre cas, où il n'y a qu'à ſuivre ce raiſonnement. Mais ſi j'ajoûte l'unité à chacun des facteurs, on aura le prémier produit, la ſomme des deux facteurs & l'unité. Soit $a \times b$ le produit eſt ab je fais $a + 1 \times b + 1$ & j'ai $ab + a + b + 1$: car ajoûtant l'unité au multipliant, j'ai outre le produit, la valeur du multiplié; & ajoûtant l'unité au multiplié, j'ai le multiplicateur qui ſe trouve être le prémier augmenté de l'unité par la précédente opération; j'aurai donc le prémier produit, le multi-

plié & le nouveau multipliant qui eſt égal au précédent plus un, j'ai donc la ſomme des deux facteurs avec l'unité de plus que le prémier produit: ce qu'il falloit démontrer. On aura pareillement le prémier produit & l'unité moins la ſomme des deux facteurs, ſi l'on retranche l'unité de part & d'autre; en effet ôtant l'unité du prémier facteur, j'ôte le multipliant, & ôtant l'unité du multipliant, j'ôte le multiplié; mais ce multiplié c'eſt le précédent moins l'unité; j'ôte donc le précédent moins l'unité, c'eſt-à dire que je n'ôte pas le précédent tout entier & qu'il s'en manque l'unité, j'aurai par conſéquent à ôter la ſomme des deux facteurs moins l'unité; ſi j'ajoûte l'unité au prémier produit, il faudra dans ce cas là, ôter la ſomme des deux facteurs, parce que l'unité qu'il ne falloit pas ôter du produit en prenant cette ſomme, doit l'être puiſqu'on augmente le produit de l'unité, & on l'ôte en la retranchant; il faudra donc retrancher toutes les unités de la ſomme des deux facteurs, de la valeur du produit & de l'unité. On peut faire diverſes obſervations ſur ce ſujet, & inventer une infinité de Théoremes de cette nature: il ſe-

ſeroit inutile d'entrer dans un plus long détail, parce qu'il ſuffit que vous ſoiés en état de continuer de vous-même ; & c'eſt ce que vous ne devés pas négliger, rien n'étant plus utile que cela, ſurtout aux commençants. Je conclurai ſeulement de tout ceci, que la règle générale pour tous ces divers cas, c'eſt de multiplier, comme nous l'avons vû, chaque partie du prémier facteur par chaque partie du ſecond, & ajoûtant tous ces produits partiaux on a le produit total; rien n'eſt plus aiſé à comprendre que le fondement de cette règle, & il n'eſt beſoin que d'attention pour la ſuivre exactement. Vous devés voir par là, que la multiplication algébrique n'a point de difficulté, & qu'il n'y a qu'à avoir le moindre bon ſens pour l'exécuter par jugement.

NEANDER. Dans la multiplication on peut ſe ſervir de grandeurs hétérogènes pour les deux facteurs ; & cependant cette opération n'étant qu'une addition réïterée d'une même grandeur, comment pourra-t-on dire par exemple que 5 Ecus multipliés par 4 mois faſſent 20 Ecus.

MATHESIUS. La difficulté n'eſt pas grande ; il n'y a qu'à ſe rappeller la dé-

finition que je vous ai donnée de multiplication ; on n'ajoûte pas les deux facteurs, on ne fait que prendre l'un autant de fois qu'il y a de parties ou d'unités dans l'autre : le second facteur ne sert pour ainsi dire, que de limite dans l'addition que l'on fait d'une grandeur avec elle-même en la prenant plusieurs fois, ainsi on ajoûte toujours des grandeurs homogènes entr'elles.

Je viens à present à quelques autres définitions. Quand on multiplie un produit par une grandeur, ce nouveau produit par une autre grandeur & ainsi de suite, on dit que les grandeurs sont multipliées continuement les unes par les autres ; par exemple si l'on à 5 grandeurs, je multiplie la prémière par la seconde, le produit des deux prémières par la troisième, celui-ci par la quatrième, & ce dernier par la cinquième, comme si j'avois les 5 facteurs 1, 2, 3, 4, 5, le produit continu seroit 120. Si les deux facteurs d'un produit sont inégaux, ce qui en resulte est un nombre *plan* ou un *Rectangle*. S'ils sont égaux, c'est un *quarré*, & la seconde puissance d'une grandeur ; car toute quantité est regardée comme sa prémière puissance, & cet-

te grandeur qui étant multipliée par elle-même produit le quarré, s'appelle racine quarrée ou ſimplement racine : un nombre plan a deux dimenſions, c'eſt-à dire deux facteurs : dans un quarré elles ſont égales, c'eſt le ſecond degré auquel une puiſſance peut être élevée en la comptant elle-même pour ſon prémier degré. Une grandeur qui a trois facteurs, trois dimenſions, c'eſt un *ſolide* : ſi elles ſont toutes trois égales c'eſt une grandeur cubique, *elevée à la troiſième puiſſance, du troiſième degré* ; & ce facteur qui multiplié par lui-même deux fois de ſuite produit le cube, c'eſt la racine cubique : le cube eſt le produit d'un quarré par ſa racine. Un produit peut auſſi avoir 4 facteurs ou dimenſions, & ſi elles ſont toutes égales c'eſt un quarré de quarré. La quatriéme puiſſance, le quatrième degré auquel une grandeur eſt élevée, c'eſt le produit d'un quarré par lui-même dont la racine eſt celle de ce quarré. On a de même des produits d'un plus grand nombre de facteurs & quand ils ſont tous égaux, c'eſt la cinquième, ſixième puiſſance d'une grandeur qui en eſt la racine : le nombre qui marque à quelle puiſſance ou à

quel degré une grandeur eſt élevée s'appelle l'expoſant de la puiſſance ; ainſi l'expoſant du cube c'eſt 3, du quarré de quarré c'eſt 4, &c. Ces noms ſont tirés de la Géometrie, mais il n'eſt pas néceſſaire de connoitre la raiſon de leur Etimologie, cela n'empêche pas que l'on ne comprenne tout auſſi bien, parce que ce ne ſont que de ſimples définitions de mots: je vous donnerai des exemples de tout ceci, ou plûtôt vous m'en apporterés vous-même quand nous repaſſerons; d'ailleurs j'aurai occaſion de m'étendre ſur ce ſujet plus au long quand il en ſera tems. Je remarque ſeulement que les degrés ou puiſſances de l'unité ſont toujours l'unité, & que cette multiplication continuée à l'infini ne ſauroit l'augmenter; car nous avons vû que un pris une fois c'eſt un, & cette unité priſe une fois c'eſt encore l'unité; en effet, on ne prend pas l'unité pluſieurs fois, on la prend toujours une fois, & priſe une fois on la prend telle qu'elle eſt, & ainſi de ſuite; il faut donc bien mettre de la différence entre ces expreſſions, prendre l'unité encore une fois, & prendre l'unité priſe déja une fois, car dans le prémier cas, on a deux: au lieu que

dans

dans le second, on n'a jamais que l'unité. Enfin il y a de l'impropriété dans ces manières de parler, *les puissances ou degrés de l'unité, ne l'augmentent ni ne la diminuent point.* Le produit est appellé multiple de son prémier facteur, parce qu'il lui est plusieurs fois égal, & ce multiplié est dit partie aliquote du produit. Ainsi une partie aliquote, c'est une partie qui prise un certain nombre de fois égale son tout, lequel tout par conséquent est un multinome, dont tous les termes sont égaux: tous les nombres sont des multinomes de l'unité, & l'unité est partie aliquote de tous les nombres.

Si l'on a deux multinomes qui soient équimultiples chacun de sa partie aliquote, c'est-à-dire, s'ils ont le même nombre de termes égaux entr'eux, les deux termes sont dits aliquotes pareilles ou mèmes aliquotes; par exemple dix écus & dix mille écus sont deux équimultiples, dont les aliquotes pareilles sont un écu & mille écus, car étant prises l'une & l'autre dix fois elles font chacune leur multinome. Quand les multinomes sont inégaux, les mèmes aliquotes sont inégales, & elles sont égales quand les multinomes sont égaux, c'est ce que nous

avons déja vû dans les Axiomes que nous avons expliqués. On ne fauroit déterminer le nombre des parties d'une grandeur en général, & on peut le prendre arbitrairement, mais après que l'on eſt convenu de l'unité, & qu'on y rapporte le tout en le déterminant numériquement: il eſt clair que l'unité eſt alors la plus petite meſure de cette grandeur; par contre pour trouver la plus grande, il faut chercher le plus grand nombre qui ſoit partie aliquote de ce nombre total d'unités qui fait la quantité dont il s'agit. Que ſi l'on a deux multinomes homogènes, tous deux exprimés par des nombres, où il n'y ait qu'une ſeule ſorte d'unités, on a l'unité pour plus petite commune meſure, & la plus grande commune meſure, c'eſt le plus grand nombre qui puiſſe meſurer l'un & l'autre exactement.

NEANDER. Tout ceci a beſoin d'être repaſſé pluſieurs fois, & demande beaucoup d'attention; non qu'il ſoit difficile, mais par là même qu'il eſt trop ſimple & qu'on y eſt peu accoûtumé; auſſi je ne ceſſe de réver aux moiens que je pourrai mettre en œuvre pour tirer de vos leçons tout le parti poſſible.

MA-

MATHESIUS. Je ne doute point que vous ne réuſſiſſiés dans cette entrepriſe; il ne vous manque pour ceci ni goût, ni talent, ni application, & il ſeroit à ſouhaitter que tout le monde ou ſeulement la plûpart en fuſſent logés là; je n'en dirai pas d'avantage à préſent, parce qu'il vaut mieux y revenir plus de fois, que de vouloir entreprendre trop de choſes en même tems. Nous pourrons recommencer aux heures accoûtumées.

ENTRETIEN VIII.

MATHESIUS.

JE viens maintenant à une propoſition fondamentale & dont on a occaſion de ſe ſervir, ou du moins que l'on ſuppoſe preſque à tous momens dans les Mathématiques; c'eſt que dans toute multiplication, *le produit du multiplié par le multipliant eſt le même que celui du multipliant par le multiplié.* Ce que je démontre ainſi. Multiplier deux grandeurs l'une par l'autre, c'eſt ſuivant la défini-

tion, prendre la prémière autant de fois qu'il y a d'unités dans la ſeconde, c'eſt à dire prendre chaque unité de la prémière le même nombre de fois ; or l'unité du multiplié priſe autant de fois qu'il y en a dans le multiplicateur, c'eſt le multiplicateur lui même, ainſi le multiplicateur eſt pris autant de fois qu'il y a d'unités dans le multiplié ; c'eſt-à-dire qu'en multipliant le prémier facteur par le ſecond, on multiplie le ſecond par le prémier ; donc changeant l'ordre des deux facteurs, & mettant l'un à la place de l'autre, le produit ne change point, ce qu'il falloit faire voir. Eclairciſſons pourtant ici une petite difficulté qui pourra paſſer pour une inſtance de celle que vous me fites l'autre jour. Suppoſons que l'on ait à multiplier 5 écus par 4 mois, on ne dira pas que 20 écus ſoient égaux à 20 mois ; bien plus, ſi l'on multiplie 5 mois par 2 ſemaines, on ne pourra pas dire ſans erreur que dix mois ſoient la même choſe que 10 ſemaines. Mais on ceſſera d'en être ſurpris ſi l'on fait attention que nous ſuppoſons ici des nombres qui ne renferment point des unités de divers genres, comme dans les exemples que je viens de rapporter :

Car

Car 5 mois multipliés par deux semaines fait autant de mois qu'on auroit de semaines, si on multiplioit 2 semaines par 5 mois ; preuve évidente que l'inégalité des produits ne vient que parce qu'ils sont composés de deux sortes d'unités inégales entr'elles. Et si l'on se rend attentif à la nature de la démonstration que je viens de donner, on verra que deux nombres exprimés d'une manière indéterminée étant multipliés l'un par l'autre, il n'arrivera aucun changement au produit par celui de l'ordre de ses facteurs. De cette proposition je tire le corollaire suivant : *Dans une multiplication de tant de facteurs que l'on voudra, dans quelque ordre quelle se fasse le produit ne changera point.* Soit prémièrement un produit de trois dimensions abc, les trois facteurs peuvent se combiner de telle manière qu'on aura les produits, abc, acb, bac, bca, cab, cba; or par la proposition précédente $abc = acb$, car $bc = cb$, qui tous deux sont multipliés par a, ils sont donc égaux. Par les mêmes raisons on a $abc = bac$, car bac égal à $bca = abc$, $abc = cab = cba$, &c. pareillement $abcd = abdc$, $abdc = acbd = acdb$ &c. comme il est

eſt évident, & de même dans tous les autres cas. Pour ſe convaincre de ceci par raiſonnement, & d'une manière plus ſatisfaiſante : ſoit abc, je dis que acb lui eſt égal, car autant de fois que l'unité ſe trouve dans ab je prens c, puiſque je multiplie ab par c; mais ab c'eſt a pris pluſieurs fois, c'eſt donc ac pris autant de fois, qu'il y a d'unités en b c'eſt-à-dire que $abc = acb$: il ſera aiſé de même que très important de continuer ces exemples fort ſouvent, & de ne les pas quitter qu'on ne ſe les ſoit rendus exactement familiers.

Ce ſont là les principales remarques que j'ai cru devoir faire ſur la multiplication en général, & conſiderée dans un tel point de vûe; j'ai omis à deſſein pluſieurs propoſitions qui ſuivent des principes que nous avons établis, & dont la connoiſſance vous eſt inutile, ou aiſée à acquerir. Quand on s'eſt une fois formé une idée bien exacte & bien préciſe d'un ſujet, qu'on ſe l'eſt rendue très familière & qu'on la poſſéde entiérement, on eſt toujours en état quand on le veut, de pouſſer ſes recherches plus loin & de les étendre quand l'occaſion s'en préſente, au lieu qu'il faut ſouvent tout re-

recommencer ſi l'on s'eſt hazardé d'aller trop vite & d'étudier ſans application. Vous devés avoir remarqué ſans peine, par tout ce que je viens de vous dire, que la multiplication eſt une eſpèce particuliére d'addition qui en différe à ces deux égards. 1°. parce que l'addition admet indifféremment pour parties d'une ſomme, des grandeurs égales & inégales, au lieu que la multiplication ne compoſe ſon produit que de grandeurs égales. 2°. L'addition eſt indéterminée dans le nombre des parties qu'elle aſſemble, mais la multiplication eſt déterminée par le ſecond facteur qui reſtreint l'addition du prémier au nombre d'unités qu'on y conçoit; ainſi tout ce qui peut être fait par la multiplication, ſe fait auſſi par l'addition, mais tout ce qui s'exécute par voie d'addition ne peut ſe faire par la multiplication. Après avoir vû les proprietés les plus générales qui ſuivent de l'augmentation des nombres, vous me permettrés bien de dire quelque choſe en paſſant ſur l'infini, & de faire ici une eſpèce de digreſſion qui ne ſera pourtant pas tout à fait étrangère à notre ſujet.

NEANDER. Je ferai bien aiſe de de vous entendre, car j'ai ſouvent trou-

vé de très grandes difficultés en réfléchiſſant ſur la nature de l'infini, de ſorte que je me ſuis vû obligé d'y renoncer comme étant une matière trop relevée pour moi.

MATHESIUS. Ne vous attendés pas à de grandes choſes de ma part ſur cet article, je n'ai que peu de remarques à faire pour le préſent, mais nous aurons occaſion d'y revenir peut-être plus d'une fois, & d'apporter de nouveaux éclairciſſements, qui ne laiſſeront pourtant jamais cette matière ſans obſcurité.

Le terme d'infini conſideré ſuivant ſon étimologie & ſa ſignification naturelle, ne veut dire autre choſe ſi ce n'eſt, ce qui n'eſt pas borné, & ce qui n'a aucune fin; mais il faut expliquer ce que l'on doit entendre par les bornes ou les termes d'un objet fini: on a très bien penſé quand on a fait conſiſter la nature du fini en ce qu'un tel objet n'a pas tout à la fois & eſſentiellement tout ce qui peut lui convenir, au lieu que l'infini au contraire a néceſſairement & eſſentiellement tout ce qu'il peut avoir. Lors par exemple que je parle d'une étendue de deux pieds, je parle d'un objet qui peut s'augmenter ſucceſſivement & qui peut exiſter ſans qu'il ait actuellement

tout

tout ce qu'il eſt capable de recevoir; les nombres ont une telle nature, ils peuvent être continuellement augmentés, & augmentés même à l'infini ſans être pour cela infinis; d'où il s'enſuit que quand on parle d'une grandeur infinie, cette expreſſion priſe dans ſon ſens naturel renferme de l'abſurde & du contradictoire; en effet l'infini n'eſt pas une quantité, on n'y peut rien ajoûter, on ne peut rien y diminuer, il eſt eſſentiellement ce qu'il eſt. Sa puiſſance d'augmenter les nombres eſt infinie, mais les nombres qui reſultent de cette augmentation ne le ſont pas; bien plus il n'approchent pas même de l'infini par leur grandeur. Million, ou tel nombre qu'il vous plaira n'eſt pas plus que deux, en comparaiſon de l'infini. Ceci paroit un paradoxe, mais pourtant rien n'eſt plus vrai, & il n'eſt pas même difficile d'indiquer la cauſe de ce préjugé. C'eſt que l'on regarde l'infini comme une quantité, comme quelque choſe de vaſte, comme une grandeur indéterminée, à cauſe qu'étants accoûtumés à ne voir que des objets finis & capables d'être augmentés & accrûs juſqu'à un point qui paſſe notre imagination & même notre entendement,

ment, on s'eſt aiſément perſuadé que ce qui avoit une grandeur immenſe & au deſſus de toute conception, étoit infini; on a dit par exemple que les hommes ſont éloignés infiniment de l'Etre ſuprème, là deſſus on a imaginé une diſtance infinie mais pourtant déterminée, dont on pouvoit aprocher de plus en plus ſans trouver jamais l'autre extrémité. Ce ſont là des amas d'idées contradictoires qui n'ont pas laiſſé que de trouver accès dans l'eſprit de la plûpart des hommes, dont le défaut ordinaire eſt de ſuppoſer ce qu'il ne voient point, & de vouloir déterminer des choſes même qui paſſent leur portée & leur capacité. Les termes de grand & de petit, ſont des termes purement rélatifs. Mille eſt auſſi petit en comparaiſon de million qu'il eſt grand en comparaiſon de l'unité; mais l'infini, au moins l'infini véritable & ſeul digne de porter ce nom, eſt un être abſolu, déterminé, & contenant en ſoi toute réalité qui n'eſt pas accompagnée néceſſairement de non réalités. Quand on parle des infinis de pluſieurs genres, on prétend par là exprimer ſeulement des grandeurs ſi petites en comparaiſon d'autres, qu'elles peuvent

vent en quelque manière être regardées comme ſi elles n'avoient aucune quantité, & les autres ſont infiniment grandes en comparaiſon dans ce ſens rélatif. De même quand on dit qu'il y a des infinis plus grands les uns que les autres, que des grandeurs finies ſoient égales à des grandeurs infinies, toutes ces expreſſions & autres ſemblables, ne doivent pas s'entendre à la lettre, c'eſt-à-dire dans un ſens abſolu. On dit par exemple, que ſuppoſant deux lignes paralleles prolongées à l'infini & diſtantes entr'elles de deux pieds, l'eſpace qu'elles renferment eſt infini, auſſi bien que chacun de ceux qu'une troiſiéme ligne parallele feroit ſi elle étoit au milieu des deux prémières; donc le prémier eſpace eſt double du ſecond, & voilà des infinis qui peuvent être inégaux, doubles, triples, quadruples &c. les uns des autres. Mais prémièremenr ces lignes que l'on ſuppoſoit d'abord finies, peuvent bien être prolongées à l'infini ſans que pour cela elles ſoient infinies, leur longueur deviendra plus grande, mais toujours elle ſera finie, d'où il s'enſuit que cet eſpace ne peut pas être infini, ni la ſuppoſition par conſéquent ne ſauroit

avoir

avoir lieu. Que si l'on suppose la chose faite, & les lignes infinies sans avoir été prolongées, comme on ne peut qu'admettre des longueurs infinies si l'on convient que l'espace est infini, pour lors la même difficulté recommence. Mais prémièrement ce sont des infinis relatifs & non pas absolus. En second lieu, ils sont plus grands les uns que les autres dans le sens qu'ils sont finis. 3°. Supposons un pied cubique d'espace, cette partie de l'espace ne peut pas être séparée de l'espace entier, ce n'est pas une substance différente; elle contient une infinité de parties dont chacune en a une infinité d'autres. Si l'on demande pourquoi elle est bornée, je répons qu'elle l'est parce que l'esprit humain ne peut pas comprendre l'espace entier, parce qu'il ne le voit que successivement; l'espace est terminé par tout, il est continu par tout, il n'a ni commencement, ni fin, ni haut, ni bas, ni bornes, ni limites, & par tout on y trouve bornes, limites, infini en grandeur, infini en petitesse, c'est ce qui passe l'imagination. Cela est incomprehensible même à l'entendement, & cependant on est forcé de le reconnoitre. Prendre une partie de l'espace
&

& la regarder comme indépendante de ce qui l'environne, lui aſſigner des bornes, c'eſt faire une abſtraction impoſſible dans la nature de la choſe même. Qu'on ne nous parle donc plus de ces divers infinis qui ſe trouvent dans l'eſpace, c'eſt une choſe trop relevée pour nous, un fait au deſſus de notre portée, & un mſtère que nous ne ſaurions comprendre. Je ne m'arrêterai pas non plus à examiner ſi les corps ſont diviſibles à l'infini ou s'ils ne le ſont pas, ce ſeroit trop s'écarter de mon ſujet, & d'ailleurs cette matière mérite bien un traité à part.

Neander. Quand vous avés dit que le fini c'eſt ce qui n'a pas tout ce qui peut lui convenir, cette définition ne me paroit pas juſte; car il s'enſuivroit de là, que le fini pouroit être infini, parce qu'il peut certainement avoir tout ce qui peut lui c nvenir; or que le fini puiſſe devenir infini, c'eſt ce qui me paroit abſurde & qui eſt même oppoſé aux réflexions que vous venés de faire.

Mathesius. Vous me permettrés bien de vous dire auſſi à mon tour, que la définition que vous avés avancée n'eſt

pas

pas précisément celle que je rapporte ; j'ai dit, si vous y avés pris garde, que le fini c'est ce qui n'a pas tout à la fois tout ce qui peut lui convenir ; or cela étant, je soutiens que l'on peut dire sans contradiction qu'une chose peut ne pas être capable de recevoir en même tems tout ce qui peut lui convenir ; c'est sa capacité d'augmentation qui est infinie mais non pas elle même ; ainsi cet objet ne sauroit avoir par succession cette infinité dont il est susceptible, par là même qu'il ne l'a pas eu tout à la fois, & qu'il lui manquera toujours nécessairement une infinité de choses.

NEANDER. Cela est vrai : mais je pense à une nouvelle difficulté. C'est que par exemple un triangle a tout ce qui peut lui convenir pour être triangle, il n'est pourtant pas infini ; donc votre définition ne sauroit être exacte.

MATHESIUS. Nous parlons d'un objet déterminé, & qui a tout ce qu'il lui faut pour exister ; il n'y a point de Triangle qui soit un Triangle en général, ils ont tous une grandeur déterminée qui peut être augmentée à l'infini : ainsi un Triangle n'a pas tout ce qui peut lui convenir, par conséquent il

il eſt fini: donc ma définition ne ſauroit manquer d'exactitude par cet endroit là.

NEANDER. Je ſuis encore obligé d'en convenir ; ainſi continués je vous prie , je vois qu'il ne me ſert de rien de vous attaquer ſur cet article.

MATHESIUS. Nous voici déja à la ſouſtraction qui ne nous arrêtera pas beaucoup : nous paſſerons enſuite à la diviſion , & voilà nos quatre règles faites juſques à recommencer , ce qui ne tardera point. Mais entrons en matiere. Comme dans toute grandeur il y a néceſſairement des parties, il eſt clair que l'on peut toujours, du moins par la penſée, ſéparer une partie de ſon tout, c'eſt ce que l'on appelle *ſouſtraction:* car nous avons vû que toute quantité eſt capable de plus & de moins. Cette opération ſe fait ſur deux grandeurs dont la prémière eſt celle que l'on diminue, & la ſeconde celle que l'on ôte. Or il eſt évident que celle-ci eſt toujours conçue comme faiſant partie de celle là, & quand on a ôté ainſi la plus petite de la plus grande, la quantité qui reſte s'appelle la différence des deux grandeurs données, qui étant ajoûtée à la plus petite, égale la

la plus grande, & étant retranchée de la plus grande donne la plus petite. C'eſt ce qui ſuit manifeſtement de la nature même de l'opération, & dont nous pouvons tirer le corollaire ſuivant. La ſomme de deux grandeurs inégales vaut deux fois la plus petite plus la différence, ainſi la plus grande c'eſt la moitié de la ſomme & la moitié de la différence; & la plus petite au contraire, c'eſt la moitié de la ſomme moins la moitié de la différence, car la moitié de deux fois la plus petite grandeur c'eſt la plus petite, & la moitié de la différence étant ajoûtée à l'autre moitié qui eſt celle de la ſeconde partie reſtante, on a la plus petite & la différence ſavoir la plus grande; de même quand on retranche de la moitié de la ſomme, qui vaut la plus petite grandeur & la moitié de la différence, cette même moitié on a la plus petite. On a ſuppoſé ici ce qui eſt évident dans ce cas, mais que l'on démontrera dans la ſuite d'une manière générale, que pour avoir la moitié d'un binome il faut prendre la ſomme des moitiés de l'un & de l'autre terme: ſoit $a = b + c$ je dis que la moitié de a c'eſt $\frac{1}{2} b$ & $\frac{1}{2} c$; car ces deux moitiés étant ôtées du bi-

binome *a*, il en reſte encore deux autres qui feront la même ſomme, donc cette ſomme eſt la moitié du binome *a*.

Connoiſſant donc la ſomme de deux grandeurs & leur différence, on peut connoitre la váleur de l'une & de l'autre. Soit $a = b + c$ dont la différence eſt *d*, je dis que la plus grande c'eſt $\frac{1}{2}$ *a* & $\frac{1}{2}$ *d*, & la plus petite $\frac{1}{2}$ *a* moins $\frac{1}{2}$ *d*: par exemple, je cherche deux nombres dont la différence ſoit 12 & la ſomme 26, le plus grand c'eſt 19 & le ſecond 7, ſuivant la règle $\frac{1}{2}$ 26 & $\frac{1}{2}$ 12; $\frac{1}{2}$ 26 moins $\frac{1}{2}$ 12. Pluſieurs grandeurs ſont retranchées continuement les unes des autres quand on ôte la ſeconde de la prémière, ou la prémière de la ſeconde; la troiſième de ce reſte ou ce reſte de la troiſième; la quatrième du nouveau reſte, ou le nouveau reſte de la quatrième, & ainſi de ſuite. Comme ſi l'on avoit, 4, 12, 9, 11; $12 - 4 = 8$, $9 - 8 = 1$, $11 - 1 = 10$ le dernier reſte ſeroit 10. Quand on retranche continuement ou pluſieurs fois une grandeur donnée d'une même grandeur auſſi donnée, ce retranchement ou cette ſouſtraction réïterée s'appelle *diviſion* mais il faut pour cela, comme il eſt

de le voir, que la grandeur dont on retranche ſoit plus grande ou pour le moins égale à celle que l'on retranche. On diviſe, en retranchant une grandeur d'une autre autant de fois que celle-ci lui eſt égale ; & c'eſt, comme l'on voit, une eſpèce de ſouſtraction. La grandeur dont on retranche s'appelle *Dividende*, celle que l'on retranche *Diviſeur*, & le nombre qui marque combien de fois ſe peut faire le retranchement, c'eſt le *Quotient*. Ainſi diviſer deux grandeurs, c'eſt voir combien de fois l'une eſt égale à l'autre, ou combien de fois la ſeconde doit être priſe pour valoir autant que la prémière. Toute diviſion eſt exacte ou inexacte, exacte quand le dividende eſt multiple de ſon diviſeur & celui-ci par conſéquent partie aliquote de ſon dividende ; inexacte, lorſqu'après avoir ôté le diviſeur du dividende une ou pluſieurs fois il y a un reſte moindre que le diviſeur. La valeur du quotient dépend de celle du dividende & du diviſeur ; car plus le dividende eſt grand, le diviſeur demeurant le même, plus grand auſſi ſera le quotient ; plus il eſt petit & plus le quotient diminue : par contre, quand on augmen-

te le diviſeur, le quotient diminue, & il vient toujours plus grand à meſure qu'on diminue le diviſeur. Cela eſt ſi évident que la moindre attention ſuffit pour le comprendre parfaitement; car l'augmentation du dividende étant plus grande que le diviſeur, dans ce cas le diviſeur y ſera pour le moins une fois de plus, & le quotient augmente de l'unité. Que ſi on augmente le diviſeur, alors chaque fois qu'on le prend il ôte du dividende plus qu'auparavant, & par là même il peut en être retranché moins de fois. Il faut remarquer que lors qu'on n'a pas égard aux fractions, ſi l'on ajoûte au dividende une quantité moindre que le diviſeur, ce ſera toujours le même quotient; parce que le diviſeur, quoique plus grand, ne ſauroit être ôté une fois de plus du dividende, ainſi on ne pourra pas lui ajoûter l'unité.

Deux diviſions donnent des quotients égaux quand même les dividendes & les diviſeurs ſont inégaux entr'eux, pourvû que le prémier dividende ſoit auſſi grand en comparaiſon de l'autre que le prémier diviſeur l'eſt en comparaiſon du ſecond: c'eſt préciſément le contraire de ce qui arrive en pareil cas dans la multiplica-

 tion,

tion ; & la raiſon en eſt que l'un & l'autre des facteurs d'un produit contribue à l'augmenter par ſon accroiſſement, & à le diminuer quand il devient plus petit ; mais dans la diviſion, puiſque le diviſeur ne contribue pas à la grandeur du quotient de la même manière que le *multipliant* à celle de ſon produit, il faut que ſi l'on a un grand dividende & un grand diviſeur pour prémière diviſion, le ſecond dividende étant plus petit, le ſecond diviſeur le ſoit auſſi pour conſerver l'égalité du quotient: en effet le dividende diminuant, le quotient diminue ; & ſi l'on alloit encore augmenter le diviſeur, le quotient diminueroit davantage, au lieu qu'en faiſant le diviſeur plus petit il pourra être autant de fois dans le ſecond dividende que le prémier diviſeur l'étoit dans le ſien, & les quotients de cette manière être encore égaux. Par exemple ſoient les deux nombres 16 & 4, dont le quotient eſt auſſi 4, je veux diminuer le dividende de la moitié, je dis qu'il faudra diminuer auſſi le diviſeur de la moitié ; car 4 ne ſe trouvera plus dans la moitié de 16 que 2 fois, à cauſe que quand la moitié retranchée y étoit, il s'y trou-

voit

voit quatre fois; si donc je retranche la moitié du diviseur, alors il se trouvera deux fois où il ne se trouvoit qu'une seule avant ce retranchement, il seroit le double de fois dans le prémier dividende, mais on en a ôté la moitié, il ne s'y trouvera donc que la moitié du double, c'est-à-dire autant de fois qu'auparavant. Voici maintenant un axiome qui est exprimé différemment de celui que nous avons déja examiné, mais qui revient au même précisément; c'est que des grandeurs égales divisées par d'autres égales donnent des quotients égaux; en effet, c'est le même qui dit que les moitiés les tiers &c. de grandeurs égales sont égales; car ces grandeurs égales ce sont les dividendes; les moitiés les tiers &c. ce sont les diviseurs, & quand on dit qu'elles sont égales cela exprime l'égalité des quotients; d'ailleurs il est clair que les mêmes grandeurs sont autant de fois égales les unes que les autres à d'autres qui le sont pareillement entr'elles; s'il y en avoit une qui eut un plus grand quotient, elle y seroit plus de fois, on concevroit donc dans celle-là plus de parties ou de mêmes unités que dans les autres, contre

la suppoſition. Quand on retranche deux grandeurs égales l'une de l'autre, on a pour reſte zero, cela veut dire qu'il n'y a point de reſte, parce que l'on ôte cette grandeur, & le tout étant retranché, les parties le ſont auſſi ; or la différence, s'il y en avoit, ne pourroit être que dans le tout, il n'y a donc point de différence. Cependant il ne s'enſuit pas de là que le dividende & le diviſeur étants égaux le quotient ſoit zero, parce qu'il eſt bien vrai qu'il ne reſte rien, mais le quotient n'indique pas le reſte, il marque combien de fois le retranchement peut ſe faire ; or il ſe peut faire une fois, le quotient eſt donc l'unité. Ainſi *un* diviſé par *un*, ou un nombre diviſé par lui-même donne pour quotient l'unité, parce que tout nombre eſt égal à lui-même une fois. Diviſant une grandeur par l'unité on a cette grandeur elle-même, car l'unité eſt une partie à la quantité de laquelle on ne fait pas attention, ainſi cette grandeur aiant autant de parties égales qu'on y conçoit d'unités, le quotient indique combien de ces parties elle renferme, & comme l'on ne concevoit rien d'autre dans cette grandeur que le nombre de ces parties, le quotient

qui

qui eſt ce nombre ſera la grandeur elle-même. *Dans toute diviſion exacte le quotient multiplié par le diviſeur, eſt égal au dividende.* Le quotient indique combien de fois le diviſeur doit être pris pour égaler le dividende; donc le diviſeur pris autant de fois qu'il y a d'unités au quotient, c'eſt-à-dire multiplié par le quotient, égale le dividende; ainſi le dividende eſt le produit du diviſeur par le quotient, ou du quotient par le diviſeur, ce qui revient au même comme on l'a vû auparavant. Mais ſi l'on veut une démonſtration poſitive, il n'y a qu'à faire attention, que le produit du diviſeur par le quotient, c'eſt chaque unité du diviſeur priſe autant de fois qu'il y en a au quotient, c'eſt-à-dire le quotient lui-même qui eſt pris par là autant de fois qu'il y a d'unités au diviſeur, & fait juſtement le produit du quotient par le diviſeur. On peut ſuppoſer que les unités du quotient ſont de la même eſpèce que celles du diviſeur, quand même on les conſidereroit à un auautre égard comme différentes: par exemple, 100 écus partagés entre 4 perſonnes donnent pour quotient 25 écus, & quand on multiplie le quotient par le diviſeur

on a toujours cent écus, & le produit n'est pas cent personnes, parce que les personnes ne sont pas regardées ici comme personnes, elles tiennent la place des écus; c'est donc comme si l'on divisoit 100 écus par 4 écus, & l'on chercheroit alors combien de fois chaque personne pourroit prendre un écu, quand il seroient tous quatre ensemble; on voit qu'ils pourroient le faire 25 fois, & chacun avoir par ce moien 25 écus. Cette remarque doit s'entendre pour une infinité de cas semblables, & il ne sera pas difficile d'en faire une juste application.

Un nombre plan divisé par l'un des facteurs donne pour quotient l'autre facteur. Un produit de deux grandeurs c'est l'une prise autant de fois qu'il y a d'unités dans l'autre: par conséquent le produit est autant de fois égal à l'un des facteurs que l'autre renferme d'unités, il donnera donc l'autre facteur si on le divise par le prémier. Un nombre solide divisé par l'un des trois facteurs donne pour produit les deux autres; de même en est-il des grandeurs d'un plus grand nombre de dimensions, parce que nous avons prouvé que dans

la

la multiplication, l'ordre des facteurs ne change point la valeur du produit.

Quand on divise une grandeur par une autre, si le dividende est complexe & le diviseur incomplexe, le quotient total c'est la somme des quotients partiaux de chaque terme de ce multinome par le même diviseur incomplexe. Prouvons d'abord le cas le plus simple, où la division est exacte, le nombre des termes du multinome moindre que celui des unités dont le diviseur est composé, & chaque terme du multinome contenant plusieurs fois le diviseur; il est clair alors que le quotient étant un nombre, & que cherchant combien de fois le diviseur est égal au dividende, il faut voir combien de fois il l'est dans le prémier terme, puis dans le second, dans le troisième &c. jusqu'à ce que l'on ait parcouru tous les termes; après quoi assemblant tous ces nombres de fois que le diviseur s'est trouvé successivement dans les termes du dividende, on aura le véritable quotient. Mais si l'on prend une partie du dividende moindre que le diviseur, on ne mettra pas l'unité au quotient, on fera attention à la partie de l'unité qui exprime combien de fois il

il faudroit prendre cette partie du dividende pour égaler une fois le diviſeur, & l'on continuera toujours de cette manière; ce qui étant fait, on aſſemble toutes ces unités & parties d'unités & l'on voit s'il y a un nombre entier exact ou quelque reſte moindre que le diviſeur; mais c'eſt ce que l'on verra en parlant des fractions, en attendant je vais donner cet exemple: ſoit 13 à diviſer par 6, il y a d'un côté 13 unités & de l'autre 6 que l'on regarde comme toutes égales & de même eſpèce entant que l'on opère, je dis que la 13 partie du dividende qui eſt 13, c'eſt la ſixième partie du diviſeur 6; donc l'unité, partie du dividende, ne fait pas le diviſeur entier, & ce quotient partial ne peut être l'unité; mais comme je ſais qu'il faudroit prendre 6 fois cette partie pour faire une fois le diviſeur, je marque dans mon quotient partial que la ſixième partie du diviſeur égale la treizième du dividende; je ſuppoſe enſuite que le ſecond terme du multinome 13 ſoit 7, alors le diviſeur entre une fois dans 7 & la ſixiéme partie y entre encore une fois, c'eſt ce que j'exprime dans le ſecond quotient; je prens enfin le troiſième terme 5½ ſi c'eſt un

tri-

trinome, & la sixième partie de 6 se trouve 5 fois dans ce dernier terme ; or les 3 quotients partiaux sont une sixième, l'unité & une sixième & cinq sixièmes, ce qui fait en tout deux unités & une sixième, c'est-à-dire que le diviseur se trouve deux fois dans 13 & que la sixième partie étant ajoutée au double de sa valeur on aura celle du dividende.

Quand on divise un terme incomplexe par un multinome, ou deux multinomes l'un par l'autre, il n'est pas facile de donner des règles générales ; il vaut beaucoup mieux les découvrir soi-même par des exemples ; aussi j'en vais proposer quelques uns pour vous faciliter la méthode de ce calcul. Prémier exemple, il faut diviser 20 + 10 par 3 + 2 c'est-à-dire 30 par 5 dont le quotient est 6, je prens le prémier terme 20 que je divise par 3, & je vois que le quotient de 20 par 3 c'est 6 & les 2 tiers de 3 ; je vois ensuite combien de fois trois est dans 10, il y est 3 fois & il reste le tiers de trois, j'ajoûte ces deux quotients, & je vois que puisque 3 entre dans 20 6 fois & 2 tiers, & dans 10 trois fois & un tiers, il entréra dans 20 + 10, 10 fois, & en effet 30 : 3 = 10.

Mais je n'ai pas le véritable quotient, car mon diviſeur n'eſt pas ſeulement 3 c'eſt 3 + 2, il eſt donc moindre, & pour connoitre précifément ſa valeur, je dis, *deux* c'eſt les deux tiers de trois, chaque fois donc que je prendrai 3 + 2 = 5 j'ôterai du dividende les deux tiers du diviſeur de plus qu'auparavant; ainſi prenant 5 dix fois j'aurois mon dividende & 20 tiers de mon diviſeur de plus; il faut donc que je ſache combien de fois je dois prendre le nouveau diviſeur afin qu'il faſſe 10 fois le précedent; & je dis, ſi je le prens une fois j'ai le prémier & les deux tiers, ſi je le prens donc 3 fois j'ai trois fois le précédent & 6 tiers, c'eſt-à-dire cinq fois le précédent, je double le quotient & prenant 6 fois mon ſecond diviſeur, j'ai ſix fois le précédent & douze tiers qui font 4, ainſi j'ai dix fois le prémier, donc le véritable quotient eſt 6 car 30: 5=6. *Second exemple*, j'ajoûte l'unité de part & d'autre aux nombres 80 & 8 ce qui fait 81 & 9. je dis que le quotient ne ſera pas le même, car le prémier quotient étoit 10, par conſéquent ſi j'ajoûte l'unité à 80 ce n'eſt qu'une fois, au lieu qu'ajoûtée au diviſeur 8, tout au-

tant

tant de fois que je prens huit je prens cette unité; j'ai augmenté le diviſeur de ſa huitième partie, & le dividende auſſi de la huitième partie du diviſeur; je prens 10 fois le nouveau diviſeur, & j'ai 10 fois le prémier & 10 huitièmes, je le prens 9 fois, j'ai 9 fois le précédent diviſeur & 9 huitièmes, c'eſt-à-dire 10 fois le précédent & une huitième, ce qui fait juſtement le nouveau dividende 81. A cette occaſion je remarque, que ſi l'on ajoûte une même grandeur de part & d'autre au dividende & au diviſeur, le quotient ne reſtera pas le même, à la reſerve de ce cas ſeulement, ſavoir quand ils ſeront égaux, parce que l'augmentation ne ſe fait qu'une fois dans le dividende & pluſieurs fois dans le diviſeur, ce qui eſt cauſe que le diviſeur ſera moins de fois qu'auparavant dans le dividende, & plus de fois, par contre, ſi l'on retranche de part & d'autre la même quantité; mais quand les deux grandeurs ſont égales, elles demeurent encore égales, & l'addition ou le retranchement ſe fera une fois dans le dividende auſſi bien que dans le diviſeur.

Troiſième exemple, ſoit 100 : 10, le quotient eſt 10: je double le diviſeur, le

quo-

quotient eſt 5, je le triple, on a le tiers du quotient &c. je le double & j'augmente 100 de la moitié, 150, 20, alors 20 étant double ne donneroit que 5, mais on a encore la moitié du dividende ce qui fait que 20 y entre 2 fois & demi c'eſt-à-dire 7 fois & demi; auſſi ſept fois 20 & la moitié de 20 ſont 150: j'augmente 100 de 10 & 10 de 1, c'eſt-à-dire, j'ajoûte au dividende ſa 10 partie & a 10 auſſi ſa dixième partie, ce qui fait onze fois le précédent, mais j'ai augmenté le dividende de la valeur du diviſeur: le quotient ſera donc le même, j'aurai occaſion de m'étendre plus au long ſur ce ſujet en parlant des grandeurs poſitives & négatives où nous allons d'abord entrer; en attendant vous continuerés à vous exercer vous-même en vous donnant pluſieurs exemples ſemblables à ceux que j'ai apportés ici, vous acquerrés par là une grande facilité à mieux comprendre la nature des raiſons Geometriques ſur leſquelles il faudra s'étendre extrêmement, comme étant la partie la plus eſſentielle des éléments de Mathématiques.

Voilà donc ce que j'avois à vous dire ſur les quatre opérations de l'Arithméti-

tique, qui sont, ajoûter, multiplier, soustraire & diviser, au moins sur leurs proprietés les plus générales & les plus universelles. Vous voiés, qu'à proprement parler, il n'y en a que de deux sortes, savoir l'addition & la soustraction, car tout ce que l'on peut faire dans une grandeur c'est de l'augmenter ou de la diminuer, mais le nombre des parties & des comparaisons que l'on peut faire de diverses grandeurs les unes par rapport aux autres, fournissent des combinaisons qui varient à l'infini. Nous allons repasser tout ceci en quelque façon en parlant des grandeurs positives & négatives, sur lesquelles il y a bien des choses curieuses & importantes à examiner; & c'est par là que nous commencerons une nouvelle conférence.

ENTRETIEN IX.

MATHESIUS.

LOrs que je considére des grandeurs de même espèce, c'est-à-dire qui peuvent être regardées comme égales ou iné-

inégales entr'elles, mais opposées les unes aux autres d'une telle façon que la position de l'une exclut la position de l'autre en tout ou en partie, & qu'elles se font réciproquement une diminution égale chacune à sa valeur, j'appelle ces sortes de grandeurs, positives & négatives. Les positives sont celles où je conçois que se trouve le retranchement, sans faire attention à celui que ces prémières font reciproquement à celles qui leurs sont opposées, & les négatives celles que je regarde comme détruisant & diminuant la valeur des positives. Ces termes pris dans leur signification naturelle sont un peu impropres, en ce qu'ils semblent marquer que la destruction de ces grandeurs n'est pas reciproque, & que la puissance de diminuer se trouve uniquement dans les négatives: mais pour en fixer le sens & en démêler toutes les équivoques, disons: 1°. que les grandeurs positives & négatives peuvent être homogènes entr'elles, c'est-à-dire comparées suivant l'égalité ou l'inégalité. 2°. Qu'elles sont pourtant de telle nature qu'étant ajoûtées les unes aux autres elles ne peuvent conserver la même valeur qu'elles avoient auparavant & qu'el-

les

les se détruisent mutuellement d'une quantité égale chacune à la sienne. 3°. Que les grandeurs négatives sont aussi réelles que les positives, & peuvent être prises au fond indifféremment les unes pour les autres. 4°. Que quand aux grandeurs négatives en particulier dont on dit qu'elles sont moindres que zero & qu'elles valent moins que rien, on doit l'entendre de cette manière, savoir que bien loin de faire partie d'une grandeur positive, elles éloignent plus l'augmentation de cette positive, quand on veut les y joindre, que si elles n'existoient point du tout, en ce qu'il faut emploier une quantité égale à leur valeur pour les détruire avant que de pouvoir augmenter la positive ; elles sont donc plus éloignées d'augmenter une grandeur positive par leur addition avec elle, que si elles étoient zero, car elles n'augmentent pas, elles diminuent ; ce n'est pas seulement une non augmentation, mais de plus un obstacle à ce qu'elle se fasse, un retranchement même formel dans cette grandeur. On en peut dire autant des positives qui deviendront négatives si on les considére de cette façon. 5°. Enfin nous allons donner quelques exem-

emples de grandeurs positives & négatives pour en faire l'application à ce que nous venons de dire sur ce sujet: telles sont donc entr'autres le bien & les dettes d'une personne, les mouvements opposés & qui se font en haut & en bas, à droite & à gauche, les poids qui sont en équilibre & qui se contrepèsent & autres cas semblables qui sont plus déterminés. Or il est certain que les dettes & le bien d'une personne sont des grandeurs de ce genre, parce qu'étants jointes ensemble, elles ne peuvent conserver leur valeur, car les biens font autant de retranchement aux dettes que les dettes aux biens; de plus l'une & l'autre de ces espèces de quantité est réelle & positive, & l'une peut être prise pour l'autre puisqu'elles sont de même nature; en effet 10 écus de bien réel sont égaux à 10 écus de dettes, ce sont donc des grandeurs homogènes. Les dettes seront regardées comme un bien positif si on les a principalement en vûe, & si l'on a cherché ensuite le retranchement que le bien y apporte. Une dette éloigne plus une personne d'avoir du bien que si elle n'avoit rien du tout, car c'est une diminution à son bien

bien de toute la valeur de la dette. Si l'on demande pourquoi il y a des grandeurs positives & négatives, & ce qui est la cause de cette oposition qu'il y a entr'elles : je répons que cela ne vient pas tant de la nature même de ces objets entant que grandeurs, que des conditions que l'on y suppose, & qui ne peuvent subsister dans un même sujet : par exemple, soit une ligne quelconque dont le milieu est un point que j'appellerai zero, je dis que supposant un mobile aussi quelconque sur ce point là ; s'il se remue d'un côté, il s'éloigne de l'autre, ce n'est pas une simple absence de mouvement, c'est un mouvement contraire ; & la raison en est qu'il ne peut pas s'avancer de deux côtés tout à la fois, alors pour s'être mû d'un côté il est plus éloigné de l'autre que s'il étoit resté au point zero qui tient le milieu entre ces deux mouvements, & il se trouve toujours plus éloigné à mesure qu'il fait son chemin du côté opposé ; que s'il vient à rebrousser, le chemin qu'il avoit fait, diminue ; & parvenant enfin à zero, il peut s'éloigner encore d'avantage, d'autant, du double, du triple &c. qu'il n'avoit fait de chemin au para-

paravant. On voit par là que ce qui fait l'oppoſition de ces grandeurs, ce ſont les ſuppoſitions que l'on vient de faire, & qui ſont tirées de la ſituation du mobile, & de ſa direction particuliére, & non point en général de la nature de ce mobile, ni de l'eſpace parcouru. Si l'on demande après cela de quelle manière on peut joindre ces grandeurs & les concevoir ajoûtées les unes aux autres, je dis qu'il ſuffit de faire attention à ce qui doit s'enſuivre lorſque l'on admet ces deux eſpèces de grandeurs, & qu'on les ſuppoſe toutes deux en même tems, ou ce qui revient au même, au reſultat de leur poſition mutuelle. On fait ſur ces ſortes de grandeurs les mêmes opérations que nous avons vûes ci-devant, au moins elles ont de coûtume d'en porter les noms; il faudra donc voir dans quel ſens, & juſques où il eſt permis de dire qu'on peut ajoûter, multiplier, ſouſtraire & diviſer les grandeurs poſitives & négatives de même que les règles que l'on donne ſur ce ſujet.

NEANDER. Il me paroit que la ſouſtraction eſt une grandeur négative, car l'addition des poſitives & des négatives n'eſt autre choſe qu'un retranchement.

MA-

MATHESIUS. A proprement parler la soustraction n'est pas une grandeur, c'est une simple supposition que l'on fait de certaines parties, qui cessent d'être regardées comme appartenantes à un tout dans lequel on les avoit d'abord considérées. Par exemple, soustraire 10 de 12 c'est prémièrement reconnoitre que 10 est une partie de 12, c'est ensuite concevoir qu'il n'y est plus, & faire attention aux idées que l'on doit conserver du tout, en éloignant celles que l'on avoit de la partie retranchée. Ainsi quand on soustrait, il n'est pas nécessaire de supposer qu'il y ait une grandeur négative capable de produire ce retranchement, ou du moins ce n'est pas une destruction reciproque. Dans toute addition de grandeurs positives & négatives, il y a bien toujours une soustraction, mais une soustraction peut se faire sans grandeurs négatives, & c'est à quoi il faut bien prendre garde, ainsi que vous aurés occasion de le remarquer dans la suite.

Je viens maintenant aux règles de l'addition, & je dis qu'ajoûtant des grandeurs positives à d'autres positives, la somme est positive, de même si l'on

ajoû-

ajoûte des grandeurs négatives à d'autres négatives, la somme est négative. Ces deux règles sont tout à fait simples, car ajoûtant les dettes à des dettes, la somme sera une plus grande dette, & du bien positif à un autre bien positif, la somme sera encore de la même espèce; mais quand on ajoûte des grandeurs positives à des négatives ou des négatives à des positives, alors il faut distinguer trois cas, c'est que la prémière est égale, plus grande ou plus petite que la seconde; si elles sont égales, la somme sera zero; car la prémière faisant un retranchement à la seconde de toute sa valeur, elle détruit la seconde, qui retranchant à son tour la valeur de la prémière égale à la sienne, la détruit entiérement; il n'y aura donc ni la prémière ni la seconde, & par conséquent la somme doit être zero; si la quantité positive est plus grande que la négative la somme est la même que le reste dans la soustraction ordinaire; la plus grande détruit toute la plus petite, mais la plus petite ne détruit pas toute la grande, elle fait un retranchement égal à sa valeur, & la différence des

des deux quantités, se trouve la somme de cette addition; la plus grande ne peut pas détruire la plus petite selon sa valeur entiére, par là même qu'elle vaut d'avantage, mais ce qui en reste est encore opposé à la quantité positive, & si on lui ajoûtoit une grandeur égale, elle seroit détruite par le prémier cas: enfin si la plus grande est négative la somme est négative par la même raison. On peut donc reduire ces trois cas à deux règles générales. 1°. La somme de deux grandeurs égales dont l'une est positive & l'autre négative est zero. 2°. La somme des grandeurs inégales, dont l'une est positive & l'autre négative est positive ou négative suivant que la plus grande a ce signe + ou —, & cette somme c'est la différence des deux grandeurs données. Enfin je suppose qu'on ait plusieurs grandeurs à ajoûter, & qui ayent des signes différents; il faut ajoûter en une somme toutes les positives, & faire une autre des négatives; après quoi, suivant notre dernière règle, la somme totale sera la différence des deux sommes partiales avec le signe de la plus grande. Quand on voit parmi les termes d'un multinome des grandeurs éga-

les

les avec des ſignes contraires, il n'y a qu'à les effacer toutes deux ſans les joindre aux autres de leur eſpèce, parce que ſe détruiſants réciproquement c'eſt comme ſi elles n'y étoient point du tout. Voilà les règles de l'addition, du moins les plus importantes; vous voiés de quelle manière on doit s'y prendre pour faire de ſemblables calculs: ainſi il faut venir à la ſouſtraction: ſur laquelle nous avons à faire quelques remarques importes.

Le terme de ſouſtraction eſt ici impropre, & il doit ſignifier *faire le contraire de prendre une grandeur*, la changer de poſitive en négative ou de négative en poſitive, & l'ajoûter ainſi changée avec une autre grandeur. Ayant donc deux grandeurs ſoit complèxes ſoit incomplexes, il faut changer les ſignes de tous les termes de la ſeconde, ſavoir le plus en moins & le moins en plus, & ajoûter à la prémiére celle-ci, dont on aura ainſi changé les ſignes, cette ſommes eſt appellée le reſte de la ſouſtraction. Examinons les divers cas qui ſe préſentent ſuivant la définition que nous venons de donner. D'abord les grandeurs ſur leſquelles on veut faire une ſouſ-

soustraction sont toutes deux positives ou toutes deux négatives, ou bien elles ont différents signes. Le prémier cas en renferme trois autres; car la prémière est égale ou plus grande ou plus petite que la seconde; quand elle lui est égale, le reste est zero, parce qu'en changeant le signe de positif en negatif dans la seconde grandeur, & l'ajoûtant ainsi changée à la prémière, ces deux valeurs se détruisent, suivant les règles de l'addition. Quand la prémière est plus grande le reste est positif, & quand elle est plus petite le reste est négatif, par la même raison. Voilà pour le prémier des trois cas généraux: le second en renferme encore visiblement 3 autres; les deux négatives étant égales la somme est zero; la prémière étant plus grande le reste est négatif, & si elle est plus petite le reste est positif. Le dernier cas est celui où les deux grandeurs ont différents signes; alors la prémière est positive ou négative; si elle est positive, & que la seconde lui soit égale, on a pour reste le double de la positive; si elle est plus grande ou plus petite, on a la somme des deux grandeurs données avec le signe de la prémière: de même, supposant la prémiè-

re grandeur négative & égale à la seconde positive, le reste est le double de la négative, & si elle est plus grande ou plus petite que la seconde, le reste est toujours la somme des deux grandeurs données avec le signe de la prémière qui, dans ce cas, est négative. Je vais maintenant exprimer tout ceci par lettres alphabetiques; en supposant toujours que a est plus grand que b on a les cas suivants $a, a . a - a = 0. a, b . a - b = q . b, a. b - a = - q . - a - a . - a + a = 0 . - a, - b, - a + b = - q . - b, - a. - b + a = q. - a, - a . a + a - 2a . a - b . a + b - a + b . b, - a . b + a - b + a . - a, + a, - a - a = - 2a . - a + b. - a - b = - a - b . - b, + a. - b - a = - b - a.$ Tout cela suit évidemment de la définition que nous venons de donner: il n'y a là aucune difficulté, & sans y chercher de finesse on ne doit pas se mettre en peine d'accorder dans tous les cas la soustraction ordinaire avec celle-ci, car je puis vous assûrer que vous travailleriés après des Chimères, & que ce feroit tenter l'impossible; cependant il convient de faire

re voir que c'eſt ici une ſouſtraction générale dont celle qui eſt uſitée eſt une eſpèce plus particuliére. En effet, ôter une grandeur d'une autre, c'eſt faire le contraire d'ajoûter, c'eſt diminuer le tout au lieu de l'augmenter & de le laiſſer tel qu'il eſt; c'eſt donc faire la même choſe que ſi l'on ajoûtoit une grandeur négative, qui tient lieu de celle qu'on retranche, à celle dont on ſouſtrait, parce que cette négative détruira dans la prémière une valeur égale à la ſienne, qui eſt ce que l'on cherchoit: or il n'importe pas beaucoup que le retranchement ſoit reciproque ou ne le ſoit pas, parce qu'il ſuffit dans la ſouſtraction commune que la partie ſoit ôtée de ſon tout, quand même ce ne ſeroit que par une ſimple abſence de la grandeur retranchée. Si je voulois ôter 10 de 9, il eſt clair que dans la ſouſtraction ordinaire cela ne ſe peut pas, parce que 10 ne fait pas une partie de 9, & qu'au contraire c'eſt 9 qui eſt une partie de 10; mais dans la ſouſtraction générale & algèbrique, il faut rendre 10 négatif & l'ajoûter à 9, ce qui donne pour reſte l'unité négative. On ôte dans ce ſens plus qu'il n'y a, en détrui-

ſant prémièrement le tout & en mettant une grandeur négative qui égale la différence du tout retranché à la quantité que l'on vouloit ſouſtraire, alors quand il reviendroit du poſitif, il ſeroit détruit par ce reſte négatif; de ſorte que c'eſt comme ſi la prémière grandeur étoit égale ou plus grande que la ſeconde, c'eſt le ſeul ſens auquel on puiſſe dire que l'on ôte plus qu'il n'y a, car pris à la lettre il eſt faux & contradictoire. Souſtraire — 3 de — 3 ce n'eſt pas ôter — 3, auquel cas il ne reſteroit rien, mais c'eſt faire le contraire de le prendre, c'eſt le rendre poſitif, ce qui fait $-3+3=0$. Car ce terme ôter — 3 de — 3 eſt équivoque, on peut ôter — 3 & il ne reſtera rien; mais ce n'eſt pas ce qu'on entend en algèbre, & voilà ce qui cauſe l'embarras; à la lettre le reſte eſt zero, de trois écus de dette ôter trois écus de dette il ne reſte rien: on ne peut pas ſouſtraire — 12 de — 9, & cependant on donne ce nom dans l'algèbre à l'opération qui donne pour reſte + 3; ôter — 9 de — 12 cela ſe peut on a — 3. Si l'on ôte — 3 de + 5, à proprement parler, — 3 ne fait pas partie de 5, mais pour

que

que -3 pût être partie de 5 il faut faire ce binome $8-3=5$, alors ôtant -3 il reste 8. On n'ôte donc pas -3 de 5, parce que 5 ne resteroit pas tel qu'il est si on lui ajoûtoit -3 il faut prendre 3 unités de plus & qui soient positives, pour que -3 fasse partie de 5 en conservant sa valeur, après quoi, ôtant la négative, ces 3 unités qui la détruisoient valent trois, ce qui fait 8 & qui s'accorde avec l'opération algèbrique par laquelle on change *moins* 3 en *plus trois* & on l'ajoûte avec *plus* 5; c'est ce que l'on peut appliquer à tous les autres cas, & trouver ainsi en quelque façon la soustraction commune. Par exemple, pour ôter 12 de 9, afin que 9 soit un tout dont 12 fasse partie je prens $12-3=9$, j'ôte 12 & il reste moins 3, ce qui revient encore à cette opération 9, 12. $9-12=-3$, j'ôte $+3$ de -3, pour que -3 soit un tout dont $+3$ fasse partie il faut prendre $-6+3=-3$, & ôtant 3 on a -6 pour reste: j'ôte $-a$ de $+a$, le tout sera $2a-a=a$, soustraisant $-a$, comme à l'ordinaire, le reste est $2a$, & c'est le véritable reste. Je prens la chose d'une autre manière,

& je confidère la fouftraction comme une opération dans laquelle on cherche la différence de deux grandeurs, c'eft-à-dire, cette quantité qui ajoûtée à la feconde fait la prémière & ôtée de la prémière donne la feconde; & pour mieux fentir cela, nous allons reprendre tous les cas les uns après les autres dans les exemples fuivants. 1°. Oter 12 de 12, c'eft voir ce qu'il faut faire à 12 pour le rendre égal à 12; or il ne faut rien faire, il faut le prendre tel qu'il eft, & ne le point changer; voilà comment la différence eft zero, c'eft-à-dire qu'il n'y a point de différence, $12 + 0 = 12$ & $12 - 0 = 12$. 2°. Oter 5 de 12, c'eft voir ce qu'il faut faire à 5 pour avoir 12, il faut lui ajoûter 7 ce qui eft la différence de 5 à 12. 3°. Oter 12 de 5 c'eft voir ce qu'il faut faire à 12 pour qu'il devienne égal à 5, il faut retrancher 7, la différence donc de 12 à 5 eft 7, mais il faut retrancher, au lieu qu'auparavant il falloit ajoûter, & cela donne les reftes ou différences 7, -7, 4°. La différence de -3 à -3 eft zero. 5°. Si je veux faire que -4 devienne -6 il faut lui ajoûter -2. 6°. Pour faire que 6 devienne moins 4 il

il faut ôter — 2, ou, ce qui revient au même, ajoûter 2 ; car deux unités positives ôtent 2 négatives ; ainsi la différence est 2. 7°. Pour ôter — 3 de + 3, c'est-à-dire, pour que — 3 devienne plus 3 il faut ajoûter 6 à — 3 ; de même pour que + 3 devienne — 3 il faut ôter 6. 8°. La différence de — 3 à + 2 c'est 5, & la différence de — 2 à 7, c'est 9. C'est encore dans ce sens qu'on peut regarder la soustraction. On a deux grandeurs & on cherche ce qu'il faut faire à la seconde pour égaler la prémière, c'est-à-dire ce qu'il faudroit ajoûter & ce qu'il faudroit retrancher, cela s'appelle le reste ou la différence, il n'y a plus alors de difficultés que celles qu'on veut bien se forger en voulant trouver une véritable soustraction là ou il n'y en peut avoir ; c'est ce qui m'a embarrassé très souvent, & j'ai éprouvé par là, quelle peine on a quelquefois de se défaire de certaines idées & de certains préjugés que l'on a formé depuis long-tems.

Avant que de finir cet article, je dirai encore quelque chose sur les grandeurs complexes. Je veux ôter 3 + 2 de 12 + 8, ou ce qui revient au même

 ren-

rendre $3+2$ mm $12+8$, pour cela il n'y a qu'à éloigner $3+2$ de $12+8$ & ſe rendre attentif à ce qui reſtera après ce retranchement, car il eſt clair qu'en ajoûtant le reſte à la partie retranchée on aura le tout, ſi l'on a bien opéré. Pour cela je dis $12+8-3-2=15$ parce qu'en ſuppoſant 3 & 2 des grandeurs négatives, ils ne retranchent dans 20 que leur valeur & rien de plus, il en eſt de même des autres cas ſemblables, & il n'y a point de difficulté en cela, pas plus que dans les grandeurs incomplexes. Mais ayant $12+8$ dont il faille retrancher $6-2$, j'ôte d'abord 6, prémier terme du binome $6-2$, & je le rends négatif, mais ce n'eſt pas 6 que je veux ôter de $12+8$, ce n'eſt que $6-2$, & moins on retranche, plus le reſte eſt grand, ſi donc je remets ce que j'avois ôté de trop, le reſte ſera le véritable, or j'avois retranché *deux* de trop, il faut donc les remettre, ce qui fait $12+8-6+2$. J'ai à retrancher $2+3-4+5-1$ de 20, le reſte ſera celui-ci $20-2-3+4-5+1=15$: en effet quand je fais 2 négatif ou quand je l'ôte de 20, il n'y a pas aſſés de retranché,

ché, il faut changer encore 3 en négatif, mais 4 négatif ôte 4 unités de la valeur de 3 + 2, je n'ai donc qu'à changer 4 en positif, parce qu'en retranchant 4 de plus qu'il ne faut, on doit le remettre; vient après cela 5 que je retranche encore de 20 en faisant — 5, & je change l'unité négative en positive. La raison générale est donc que toutes les positives doivent avoir le signe moins pour marquer le retranchement, & que les négatives diminuant des positives font que l'on a trop retranché d'autant qu'elles valent, il faut donc remetre ce qu'on avoit ôté de trop, c'est-à-dire, changer le négatif en positif; en effet quand on áura retranché tout le positif & que l'on aura changé ce négatif en un signe contraire, il sera vrai de dire que le reste c'est la grandeur prémiére avec la somme des négatives devenues positives moins celles qui étoient positives auparavant, puisque ces négatives faisoient qu'on avoit trop ôté, donc pour conserver le retranchement des positives il faut rajoûter d'une manière positive la valeur des négatives, qui est ce qu'on auroit retranché de trop.

Dans l'Arithmétique on peut bien re-

duire d'abord la prémière grandeur & la seconde aussi, en sorte qu'il ne paroisse qu'un seul signe dans l'une & dans l'autre; mais dans l'Algèbre & le calcul litteral, ces reductions ne peuvent se faire, parce qu'on ne détermine pas la valeur des quantités dont on se sert, & qu'on ne sait pas par conséquent celles qui sont plus grandes ou plus petites, ni jusqu'où va leur différence. Aussi a-t-on raison d'appeller cette soustraction *algébrique*, parce que c'est là principalement ou l'on a de coûtume de s'en servir.

Je viens ensuite à la multiplication des grandeurs positives & négatives, & pour en indiquer d'abord les règles, il est clair qu'il n'y a que ces deux cas généraux: les deux facteurs ont le même signe, ou ils ont un signe différent. Quand le signe est le même, le produit est toujours positif, & quand les signes sont contraires, le produit est négatif: c'est-à-dire, comme l'on a de coûtume de s'exprimer ordinairement; multipliant plus par plus, le produit est plus; moins par moins donne plus; plus par moins, & moins par plus donnent moins. Ce sont là en peu de mots les règles de la multiplication algèbrique qui ont embarrassé

tant

tant de perſonnes, uniquement pour ne pas faire aſſés d'attention que ce n'eſt ici qu'une eſpèce de multiplication ainſi improprement dite, opération purement arbitraire, & qui n'a plus de difficulté dès qu'on l'envifage dans ſon véritable point de vûe, & telle qu'elle eſt effectivement.

Il faut donc commencer par en donner une juſte idée. Multiplier, c'eſt prendre une grandeur autant de fois & de la même manière qu'une autre grandeur auſſi donnée ſe trouve être par rapport à l'unité poſitive: cela étant. 1°. Multipliant des grandeurs poſitives par d'autres poſitives, le produit eſt poſitif; on a une grandeur poſitive, ſavoir le multiplié pris une ou pluſieurs fois d'une manière poſitive, à cauſe que le multipliant eſt lui même poſitif par la ſuppoſition, donc le produit eſt poſitif. 2°. Quand on multiplie des grandeurs négatives par des négatives, on a une grandeur négative dans le multipliant qui eſt compoſé d'unités contraires à la poſitive; il faut donc prendre, pour produit, le même nombre de fois la grandeur oppoſée à la négative, c'eſt-à-dire une poſitive, ainſi le produit ſera poſitif; car prenant le multiplié tel qu'il eſt ſans changer de ſigne

ce ne feroit pas conferver en le prenant le même rapport qu'il y a entre le multipliant & l'unité pofitive. 3°. Multipliant des grandeurs pofitives par des négatives on a un produit négatif; le multipliant eft contraire à l'unité pofitive, le multiplié eft pofitif, il faut donc pour produit prendre une ou plufieurs fois la grandeur oppofée au multiplié, c'eft-à-dire une grandeur négative. 4°. Enfin multipliant des grandeurs négatives par des pofitives le produit eft encore négatif; car le multipliant eft pofitif, il contient donc d'une manière pofitive l'unité pofitive; le multiplié eft négatif, il faut le prendre, tel qu'il eft fans y rien changer, une ou plufieurs fois, ainfi qu'on n'a pas changé de figne pour avoir le fecond facteur, c'eft ce qui fait que le produit eft négatif. Ce font là, comme vous voiés, des conféquences naturelles & néceffaires de la définition que je viens de donner. On voit même par là, que la multiplication Arithmétique eft une efpèce de multiplication Algèbrique, qui eft beaucoup plus générale & plus univerfelle que celle-là; c'eft pourquoi il faudra montrer en quoi elles conviennent auffi bien que ce qui en fait la différence.

Quand

Quand on dit que moins par moins donne plus, on ne ſait ſouvent qu'en penſer, mais la ſurpriſe ceſſe quand on a étourdi l'eſprit par une démonſtration que l'on ſe hâte de fagoter à ceux qui trouvent ce myſtère incomprehenſible, après quoi ils croient comprendre le τὸ ὅτι, pour le τὸ διότι, il va comme il peut, nous voions bien, dit-on, que cela doit être ainſi ; mais pour la manière dont la choſe ſe fait, c'eſt ce qui paſſe l'intelligence humaine ; ce ſont là les idées de bien des perſonnes qui ſe laiſſent impoſer quand on leur parle de démonſtration, & qui les croient également, qu'elles ſoient fauſſes ou véritables, qu'ils les aient compriſes ou non, & ils croiroient paſſer pour des gens qui ont perdu le ſens commun s'ils s'aviſoient de douter d'une choſe qui paſſe généralement pour démontrée ou d'y chercher le moindre éclairciſſement ; cependant il eſt de fait que ce que nous venons de dire ſur les grandeurs incomplexes n'eſt fondé que ſur une définition purement arbitraire, & n'eſt par conſéquent ſuſceptible d'aucune difficulté ; tout ce qu'il convient de faire à ce ſujet, c'eſt de ſe le rendre bien fami-

lier

lier, & de comparer exactement cette multiplication générale avec celle dont on se sert plus ordinairement, & en particulier de faire voir qu'il faut se servir de cette multiplication dans les grandeurs complexes & composées de différens signes.

NEANDER. J'ai ouï dire à un docte personnage soi-disant Arithméticien, qui m'a appris il y a quelque tems les quatre règles de son art, que ceux qui poussoient cette science jusques aux Mathématiques y apprenoient de grandes vérités & des choses tout à fait admirables. Par exemple, disoit-il, dans l'Algébre, si vous ôtés *plus* de *moins*, vous aurés un reste qui est plus grand que le tout; si l'on multiplie des dettes par des dettes on a pour produit du bien réel, & il conjecturoit que ce pourroit être à cause que les dettes sont aussi positives que le bien; je ne sai s'il connoissoit un peu ces matières là, au moins en raisonnoit-il beaucoup, & d'un ton fort decisif.

MATHESIUS. Je connois assés le génie de ces Messieurs, dès qu'ils savent un peu manier les chiffres & le calcul, ils se donnent tous les airs d'un Mathéma-

maticien de profeſſion, & ſe rendent par là ſi ridicules qu'il n'y a perſonne qui ne s'en apperçoive. Quand on multiplie des dettes par des dettes, c'eſt un produit poſitif parce que les dettes ſont auſſi réelles que le bien, la plaiſante ſolution! Je conclurois ſuivant ce beau principe, quoique fauſſement s'il me ſemble, qu'ajoûtant des grandeurs négatives à d'autres négatives, la ſomme devroit être auſſi poſitive, ce que perſonne n'a jamais prétendu, que je ſache! Lorſqu'on multiplie des dettes par des dettes on a un produit négatif, mais on ne les conſidére pas alors comme négatives, elles ſont regardées dans l'un & dans l'autre facteur, comme des grandeurs poſitives, & pour le faire dans un autre ſens, il faudroit regarder prémièrement la dette qui exprime la valeur du ſecond facteur comme contenant des unités oppoſées à la poſitive, & prendre enſuite la dette, prémier facteur, pour la changer en poſitive autant de fois qu'elle doit être priſe pour faire le produit qu'on demande, & cela revient à la méthode générale que nous avons indiquée. Mais ſans nous arrêter plus longtems à admirer la ſottiſe de

ces

ces Praticiens verſés dans la routine & dans le jargon de leur Ecôle, paſſons à quelque choſe de plus important.

Il nous reſte à parler des grandeurs complexes, & c'eſt là où nous pourrons remarquer la conformité de ces deux manières de multiplier, ce qu'on n'a pas occaſion de faire dans l'Arithmétique à l'égard des incomplexes, non plus que quand on fait des reductions dans les facteurs avant que de multiplier.

Je ſuppoſe d'abord que l'on ait à multiplier une grandeur, par une ſeconde moins une troiſiéme plus petite que la ſeconde, il faut commencer par prendre la prémière autant de fois qu'il y a d'unités dans la ſeconde, mais ce produit n'eſt pas le véritable, parce que le ſecond facteur eſt moindre que la ſeconde grandeur, il s'en manque la troiſième toute entière, je dois donc retrancher de ce produit la prémière grandeur autant de fois qu'il y a d'unités dans cette troſième, le véritable produit ſera par conſéquent le produit de la prémière grandeur par la ſeconde moins le produit de cette même ſeconde par la troiſiéme. Faiſons à preſent du multiplié un binome dont le ſecond terme ſoit né-

négatif & plus petit que le prémier positif, le multipliant étant incomplexe; le produit de la prémière grandeur par la troisième est trop grand, & comme chaque fois qu'on prend le prémier terme il faut en ôter le second, on devra retrancher le produit de la seconde grandeur par la troisième, ce qui donne pour produit du binome par l'incomplexe, le produit positif du prémier terme par l'incomplexe, & le produit négatif du second terme par le même incomplexe. Or dans ces deux cas, le prémier produit a été positif à cause qu'il étoit fait de la multiplication de deux grandeurs positives, mais le second est négatif parce que les deux facteurs avoient des signes contraires; on fait donc ici usage dans tous les cas semblables de la multiplication algébrique, comme il est aisé de le voir par l'opération.

Je suppose enfin que l'on ait à multiplier une prémière grandeur moins une seconde par une troisième moins une quatrième, c'est-à-dire ici qu'on ait une multiplication dont l'un & l'autre des facteurs soit un binome dont le second terme négatif soit plus petit que le prémier positif, on peut démontrer par rai-

raiſonnement qu'on trouvera la même valeur en ſuivant les règles que nous avons d'abord indiquées. C'eſt ce qu'il faut examiner en détail, & il n'eſt beſoin que de ſimple explication pour cela, parce qu'il porte ſa preuve avec lui. Déja le prémier produit eſt poſitif, les deux prémiers termes de chacun des binomes, facteurs de cette multiplication, étant poſitifs ; je remarque enſuite que ſi tous les termes de mes deux facteurs étoient poſitifs, je n'aurois qu'une partie du produit que je cherche, mais parce que l'une & l'autre ont une grandeur négative quoique chacune d'elles ſoit moindre que ſa poſitive, le produit des deux poſitives eſt néceſſairement plus grand qu'il ne faut : or pour déterminer cet excès & le retrancher afin d'avoir le véritable produit, je retranche du prémier produit des deux poſitives, le produit de la ſeconde grandeur par la troiſième, ce qui me donne au juſte le produit de la prémière moins la ſeconde par la troiſiéme ; je n'ai pourtant pas encore mon compte à cauſe de la quatrième grandeur négative, & autant d'unités que je retranche de la troiſième grandeur, c'eſt autant de fois que je dois

dois ôter la prémière grandeur, moins la seconde; j'ôte donc encore le produit de la prémière par la quatrième, moins le produit de la seconde par la quatrième, ce qui me donne en tout. 1°. Le produit de la prémière par la troisième positive. 2°. Le produit négatif de la seconde par la troisième. 3°. Le produit négatif de la prémière par la quatrième, & enfin 4°. le produit positif de la seconde par la quatrième. Eclaircissons encore ceci par un exemple. On a $12 - 2$ à multiplier par $7 - 3$, les reductions faites on a, 10, à multiplier par 4 ce qui fait 40, & sans reductions suivant les règles $12 - 2 \times 7 - 3 = 84 - 14 - 36 + 6 = 40$; car $12 \times 7 - 84$ est trop grand puisque l'on prend moins que 12 moins de 7 fois, on en retranche deux unités, on retranche 2 pris 7 fois, c'est-à-dire 14, le second produit est donc négatif, mais on n'a que le produit de $12 - 2$ par 7, on ôte encore de 7 trois unités, c'est-à-dire trois fois $12 - 2$ ce qui fait le troisième produit négatif, or ôter trois fois $12 - 2$ c'est ôter trois fois 12 ce qui étant trop, il faut ajoûter *deux* autant de fois qu'on l'avoit ôté de trop, c'est-à-dire trois fois,

ce

ce dernier produit est positif ; & c'est ce que l'on devoit avoir. Si l'on continue ces exemples, on découvrira un grand nombre de propositions générales que cette multiplication algébrique fournit quand on en suit les règles ; & c'est toujours l'avantage de l'algébre de rassembler en un seul une infinité de cas pour ainsi dire, ce que ne fait pas l'Arithmétique, parce qu'elle n'a que les nombres pour objet & par conséquent que des quantités déterminées ; mais cependant l'Arithmétique raisonnée n'est au fond & essentiellement que l'Algèbre, quoi que pourtant il soit vrai de dire qu'avec cette dernière on va un peu plus loin, & que son usage est plus étendu. Quand on se sert de nombres, c'est presque toujours comme si l'on avoit des lettres, au moins si l'on veut ne pas s'arrêter au cas particulier qu'on examine ; en effet ayant $7 - 2 \times 7 - 2$ suivant les règles, le produit est la somme de ceux-ci $7 \times 7 = 49, - 14, - 14, 4 = 25$ quarré de $7 - 2 = 5$; j'ai eu le prémier terme, le double rectangle négatif du prémier par le second & le quarré du second, ainsi je vois qu'il en sera de même de tout autre nombre,

bre,

bre, parce que le raisonnement dont je me servirois pour établir cette vérité ne tireroit sa force d'aucun nombre en particulier. Je finirai la multiplication par cette petite remarque, c'est qu'ayant une grandeur négative son quarré est positif, son cube est négatif, sa quatrième puissance positive, & ainsi alternativement $- a . + a a - a a a + a a a a.$ Voilà qui est bien propre à fatiguer l'esprit de ceux qui cherchent des difficultés là où il n'y en a point.

NEANDER. J'ai remarqué qu'en traitant des grandeurs positives & négatives, vous avés parlé de la soustraction avant la multiplication, ce que vous n'aviés pas fait la prémière fois.

MATHESIUS. C'est que pour parler de la multiplication de ces sortes de grandeurs, il falloit auparavant connoitre la nature de la soustraction, comme vous devés vous en être apperçû par tout ce que nous avons dit sur ce sujet, au lieu que dans la multiplication ordinaire, il n'est besoin que de la seule addition; ainsi l'ordre demandoit que je traitasse de tout ce qui regarde l'augmentation des nombres avant que de parler de ce qui concerne leur diminution.

tion. Mais on doit toujours préferer une méthode claire & facile, à une certaine régularité de convenance dont il ne faut jamais se servir aux dépends de cette prémière. Il feroit tems de finir, mais comme je voudrois achever cette matière aujourdhui, & que nous repasserons plûtôt deux fois, je suis presque resolu de continuer, si vous le trouvés à propos, & si cela ne vous incommode pas.

NEANDER. Pour moi cela ne me fait aucune peine, & je ne crains autre chose sinon de vous fatiguer, mais puisque vous le voulés ainsi, vous me ferés plaisir de continuer.

MATHESIUS. Il me reste à parler de la division, & je commence d'abord par en indiquer les règles qui sont les mêmes que celles de la multiplication, savoir; 1°. divisant plus par plus le quotient est plus; 2°. divisant moins par moins le quotient est plus; 3°. divisant plus par moins, le quotient est moins. 4°. Divisant moins par plus, le quotient est encore moins; ce qu'il y a d'admirable en cela, c'est qu'elles s'accordent parfaitement avec celles de la multiplication; car si par la prémière règle, des

grandeurs positives donnent un quotient positif; lorsqu'on le multiplie par le diviseur il est égal au dividende, & effectivement le produit de deux positives donne une grandeur positive. Moins divisant moins donne plus, & le quotient plus multipliant le diviseur moins donne moins: plus divisant moins donne moins, & le quotient moins multipliant le diviseur moins, donne plus. Enfin moins divisant plus donne moins, & le quotient moins multipliant le diviseur positif donne moins. Mais pour découvrir le véritable fondement de ces règles, il n'y a qu'à bien définir l'opération dont nous parlons. Nous avons d'abord vû qu'elle consistoit à chercher combien de fois une grandeur est égale à une autre, ou combien de fois la seconde doit être prise pour égaler la première, & que le quotient étoit un nombre dont les unités indiquent combien de fois le dividende est égal à son diviseur: ajoûtons à cela que le quotient doit être pris de la même manière par rapport à l'unité positive, que le dividende l'est par rapport à son diviseur. Cela étant, si je divise deux grandeurs positives, comme le diviseur pris plusieurs fois

fois & d'une manière positive, autant qu'il le faut, égale son dividende, de même l'unité dans le quotient sera prise plusieurs fois & d'une manière positive, c'est-à-dire que le quotient, qui n'est que l'assemblage de ces unités, le sera aussi. Divisant des grandeurs négatives, le quotient sera positif; car le diviseur pris plusieurs fois tel qu'il est, & sans y rien changer donnera son devidende; le quotient sera donc positif, étant pris d'une manière positive. Divisant plus par moins, on a moins, parce que le Diviseur négatif pris plusieurs fois, tel qu'il est, fera bien une grandeur égale, mais opposée à son dividende, & on ne pourra l'avoir qu'en prenant le même nombre de fois la grandeur opposée au diviseur négatif: on devra donc prendre aussi pour quotient des unités contraires à l'unité positive, c'est-à-dire, une grandeur négative. Enfin quand on divise moins par plus, on a *moins* par la même raison, qui est que changeant le diviseur positif en négatif pour avoir le dividende, il faut changer de même, pour avoir le quotient, l'unité positive en unité négative, ce qui donne encore *moins*.

Il

Il n'eſt pas néceſſaire non plus de démontrer ces règles, parce qu'elles dépendent encore, comme celles de la mùltiplication, d'une manière d'opérer qui ſe fait ſimplement en vertu de certaines ſuppoſitions arbitraires, & qui par là même n'ont pas beſoin de preuves.

Je vais donner après cela quelques exemples de diviſion pour les grandeurs complexes ſur leſquelles on n'a pas des règles fort générales, ou qui du moins ſont ſi abſtraites qu'il faudroit avoir une connoiſſance plus que mediocre des Mathématiques pour chercher à les découvrir, encore, peut être, le feroit-on inutilement. Quoi qu'il en ſoit nous nous y arrèterons un moment, ne fût ce que pour donner au moins quelque ouverture d'eſprit à ce ſujet. Prémièrement, ſoit 120 & $12 - 2$ à diviſer l'un par l'autre; ſuivant les règles, on a $120 : 12 - 2 = 10$, & il reſte 20 à diviſer par $12 - 2$: je vois que 12 eſt égal à 20 une fois, & qu'il reſte $8 + 2$; à cauſe qu'outre les huit unités reſtantes de 20 dont on a ôté 12, on a retranché deux autres unités de plus qu'il ne falloit; ce n'eſt donc que 10 de diminution, & il reſte encore 10 à diviſer par

par $12 - 2$. Avant que d'aller plus loin, j'assemble toujours les unités de mon quotient qui se trouvent déja $10 + 1 = 11$, & cette derniére division je suis obligé de la finir par reduction, à moins que je ne veuille entrer dans un calcul à l'infini, où j'aurois pour quotient des suites de grandeurs positives & négatives. Je dirai donc, 12 est plus grand que 10 de deux unités, par conséquent il s'en manque 2 que je ne puisse ôter 12 de 10, mais il s'en manque aussi 2 que je n'ôte 12; ainsi il ne s'en manque rien que je ne puisse ôter précisément $12 - 2$ de 10, & le quotient se trouvant pris par là encore une fois il contiendra 12 unités, comme il le falloit. Dans le calcul litteral où l'on ne détermine pas les grandeurs données, le quotient ne se trouve presque jamais exact surtout dans les incomplexes, comme $a : b$, $a : b - c$ &c. Or le quotient de $a : b$ soit nommé q, j'aurai $bq - cq = a$, c'est-à-dire si a est multiple de b, & que c soit plus petit que b, on aura le quotient du dividende par le prémier terme du diviseur multiplié par le diviseur, & c'est tout ce que l'on en peut savoir. En second

cond lieu, ayant 120 — 20 à diviſer par 30 — 5 le quotient doit être 4; or il s'en manque 20 que 30 ne puiſſe être pris 4 fois, & il s'en manque 5 fois 4 unités, que 4 ne ſoit puis 30 fois; le quotient eſt donc 4, parce que ce qu'on ne pouvoit pas retrancher & qui ſe trouvoit ſurpaſſer quatre fois le diviſeur eſt préciſément ce qui s'en manque qu'on n'ait ôté 4 fois ce diviſeur plus grand que le véritable. Auſſi a-t-on par l'opération 120 — 20 : 30 — 5 I. 120 : 30 = 4, ce qui fait 30 × 4, — 5 × 4 qu'il faut ôter de 120 — 20 ſavoir 120 — 20 lui même, & qui s'exprime ainſi 120 — 120 — 20 + 20 = 0. Il faut remarquer que dans la diviſion algébrique, après avoir diviſé le prémier terme du dividende par le prémier du diviſeur, s'ils ſont tous deux complexes, il faut multiplier le quotient que l'on trouvē par tous les termes du diviſeur & retrancher la ſomme de ces produits partiaux du dividende entier en ſuivant les règles de la ſouſtraction algébrique, puis diviſer ce reſte par le diviſeur de la même manière & ajoûter le nouveau quotient au précédent, juſques à ce que l'on ne puiſſe plus diviſer,

 on

on aura de cette manière le quotient total de la divifion, à moins que le refte, pour n'être pas affés déterminé non plus que le divifeur, on ne puiffe par là même déterminer s'il eft égal plus grand ou plus petit que ce divifeur. .

En troifième lieu, foit 100: 12 — 2. *Cent* contient *douze* huit fois & il refte 4, le quotient eft 8; mais 12 ne devoit pas être pris tout entier, il faut en ôter 2 chaque fois qu'on le retranche de 100, ce qui fait 100 moins quatre, moins deux pris huit fois, c'eft-à-dire 100 moins 20, il refte donc 20, unités à divifer pour 12 — 2, le quotient eft 1 & il refte 8, or il s'en manque 2 qu'on n'ait ôté 12, donc il refte 10 à divifer par 12 — 2, & 10 = 12 — 2, comme nous l'avons vû auparavant, le quotient eft donc 10.

En quatrième lieu, prenons 28 — 27 à divifer par 4 — 3, le quotient doit être feulement l'unité: 28 divifé par 4 donne 7, prémier quotient, je prens 7 quatre fois, or je le prens 3 fois de trop, il faut donc retrancher 7 trois fois, c'eft-à-dire ôter 21 de 28, dont le refte eft 7; mais comme le dividende eft 28 — 27, il s'en manque 6 unités

que

que le quotient de 28 — 27 par 4 — 3 ne ſoit 7. Voions donc combien de fois ces 6 unités négatives contiennent le diviſeur, car autant de fois qu'elles le contiendront, ce ſera le même nombre de fois que l'on devra retrancher l'unité du prémier quotient 7, en effet dès qu'on a pris plus que le dividende, & que ce qu'on a mis de trop ne fait point partie de cette grandeur, 6 eſt négatif & il doit donner des unités négatives puiſque le prémier terme du diviſeur eſt poſitif, c'eſt ce qu'on va voir dans l'opération ſuivante. 1°. On a 28 — 27 : 4 — 3, le prémier quotient eſt (7) & 28 — 21 = 7, c'eſt-à-dire que le dividende devient 28 — 27 — 7 = 28 — 34 = — 6: car 28 — 27 eſt un plus petit nombre que 28 — 21, la différence eſt 6, il s'en manque donc 6 unités que le quotient ne puiſſe être 7. Je diviſe — 6 par 4 — 3, j'ai pour quotient — 1, qui multiplié par le diviſeur fait — 4 + 3 = — 1, j'ôte ce — 1 de — 6 en le faiſant + 1 & le reſte eſt — 5; le quotient eſt (7 — 1) & — 5 : 4 — 3 = — 1, 4 — 3 × — 1 = — 4 + 3 = — 1 qui ôtée de — 5 donne — 4, & le quo-
 tient

tient eſt $(7 - 2) - 4 : 3 = - 1$, $-1 \times 4 - 3 = -4 + 3 = -1$, je retranche -1 de -4 il reſte -3 & le quotient eſt $(7 - 3)$ je diviſe -3 par $4 - 3$ & il faut alors faire la reduction de $4 - 3 = 1$, qui diviſant -3 donne pour quotient -3, & le quotient véritable ſera $7 - 6 = 1$, le reſte négatif -6 contenoit ſix fois le diviſeur, c'eſt pourquoi on a retranché auſſi 6 unités du quotient 7 qui s'eſt trouvé par là reduit à *un*.

Je n'en dirai pas d'avantage pour le préſent, & je finis par vous donner un conſeil qui me paroit très important, c'eſt que cette matière étant fort curieuſe, & propre pour former l'eſprit à la recherche des choſes dificiles, à le familiariſer extrèmement avec les idées les plus abſtraites, & à faciliter la découverte des règles ſur des ſujets qui n'en paroiſſent pas d'abord ſuſceptibles, vous ne ſauriés mieux faire que de vous y exercer le plus ſouvent que vous pourrés, en y donnant au moins quelques uns de ces moments de loiſir qu'il eſt ſi facile de trouver quand on a envie de les mettre à profit. La ſcience des grandeurs poſitives & négatives eſt plus vaſte

vaſte que l'on ne croit, & je penſe que ſi l'on y donnoit aſſés d'application, on découvriroit par ſon moien pluſieurs choſes également curieuſes & utiles.

ENTRETIEN X.

MATHESIUS.

CE que j'ai dit juſques à préſent, convient d'une manière tout à fait générale à quelques grandeurs ou quantités que ce puiſſe être, puis qu'il reſulte manifeſtement de la nature même de la grandeur qui eſt de pouvoir être augmentée & diminuée. Je dois maintenant entrer dans un plus grand détail, & obſerver, ſurtout, les diverſes rélations que deux ou pluſieurs grandeurs peuvent avoir entr'elles: c'eſt ce qui va faire d'abord le ſujet des raiſons, proportions, & progreſſions Arithmétiques.

NEANDER. J'en ai fait quelque choſe; mais à ce qu'il me paroit, cela n'eſt pas fort difficile.

MATHESIUS. Lorſque comparant deux grandeurs, je vois qu'elles ne diffèrent que du plus au moins, & que

dans l'une ſe trouve tout ce qui eſt dans l'autre plus ou moins une certaine grandeur qui eſt auſſi de la même eſpèce ; je dis que ces deux prémières ſont en raiſon Arithmétique. Il ſemble qu'il n'y a là aucune difficulté ; néanmoins on trouve pluſieurs perſonnes qui ſe forment de fauſſes notions des rapports que les objets ont entr'eux, & par conſéquent des *raiſons* des grandeurs, puiſqu'elles ne ſont autre chôſe que les divers rapports qui reſultent de la comparaiſon que l'on fait des quantités les unes à l'égard des autres, c'eſt pourquoi il convient d'examiner un peu ce que l'on doit penſer ſur cet article, dûſſe-je faire une digreſſion, & m'écarter de mon ſujet pour quelques moments.

Nous avons déja remarqué auparavant, que les diverſes choſes auxquelles nous attribuons l'exiſtence ſont compoſées, & renferment pour l'ordinaire pluſieurs réalités & pluſieurs attributs ; ou pour ne parler que de nos idées, comme il n'y en a point que nous puiſſions concevoir comme abſolument ſimple, & qui ne contienne diverſes repréſentations, il y en a pluſieurs qui ſont communes à un grand nombre d'entr'elles,

de

de façon que ce qui fait que l'on peut distinguer l'une sert aussi à reconnoitre les autres, & cela en tout ou en partie. Comme par exemple, dans les idées de Cercle & de Triangle, celle de figure se trouve commune à ces deux, mais il y en a aussi qui ne sont propres qu'au cercle & qui ne sauroient convenir au Triangle ni à aucune autre figure, & reciproquement. Or les idées de grandeurs égales & inégales ne sont autre chose que des ressemblances par rapport à la quantité qui peuvent s'y rencontrer ou non, & qui varient extrêmement dans leurs différences. Ce sont donc des objets propres à être comparés, & dont il résulte divers rapports tout comme daus les autres. Or chacun sait que la comparaison, est cet acte de l'esprit qui se rend attentif sur deux idées en même temps afin de voir ce en quoi elles se ressemblent, & ce en quoi elles différent. Ce qui sert de fondement aux rélations se trouve dans les objets, & les rélations ne sont autre chose que les idées que l'on compare. Les relations n'ont pas donc une existence différente des idées que l'on se forme de divers objets & des comparaisons que l'on en peut faire.

 Par

Par exemple, ſi deux cercles doivent être néceſſairement égaux ou inégaux, cette relation ne ſe trouve ni dans le prémier ni dans le ſecond, elle n'exiſte que dans les idées que l'on s'en forme. Mais, dira-t-on peut-être, indépendamment de toutes vos comparaiſons, ces deux cercles ſeront toujours en raiſon d'égalité, de plus grande ou de moindre inégalité, & cela, ſoit que vous y penſiés ou non. A cela je répons que l'égalité de deux cercles n'eſt pas un attribut de ces deux cercles pris enſemble, non plus que de l'un ou de l'autre ſéparement, la quantité de la ſurface du prémier cercle exiſte d'une manière déterminée, celle du ſecond auſſi; or il ſe peut que cette étendue ſoit la même dans l'une & dans l'autre, ſans ſuppoſer quoi que ce ſoit d'autre que l'exiſtence des objets comparés & la réalité de la comparaiſon. C'eſt donc inutilement que l'on veut introduire ces ſortes d'*entités* dont on n'a pas la moindre idée, un genre d'êtres qui ne ſont ni ſubſtances ni modes, un *tertium quid* inventé à plaiſir, Etres qui doivent leur naiſſance à celle des objets, qui n'exiſtent qu'autant que durent certaines modifications, & qui s'évanouiſ-

ſent

ſent avec elles, êtres enfin ſur leſquels on doit mouler pour ainſi dire ſes idées, & qui les rendent vraies ou fauſſes, ſuivant qu'elles leur ſont conformes ou qu'elles en diffèrent. Tout cela me paroit deſtitué, je ne dirai pas de vraiſemblance, ni même de ſimple probabilité; mais encore on a de très fortes raiſons pour ne les pas admettre; je n'entrerai point dans tout ce détail, parce qu'une hypothèſe qui établit des ſuppoſitions de cette nature doit être appuiée pour le moins ſur de ſolides fondemens; or elle n'a pas un ſeul argument valable en ſa faveur: je finirai pourtant par cette remarque. Suppoſons que Dieu crée préſentement deux boules parfaitement égales, ou ſi vous voulés, que l'une ſoit le double de l'autre. Avant que ces boules exiſtaſſent, il n'y avoit point de rapports entr'elles; du moins leurs relations n'étoient pas auſſi réelles, & on les pouvoit regarder comme de plus foibles entités: Il faut donc qu'au moment que Dieu viendra à donner l'exiſtence a ces deux corps, il ſorte du ſein du néant une multitude infinie d'êtres nouveaux; car cette boule peut être comparée non ſeulement avec l'autre, mais encore

avec tous les objets quelconques sans aucune exception tant possibles que réels, incréé, comme finis. Or quand je n'admettrai pas tout cela, quand je me contenterai de dire : ces deux boules auront chacune leur existence à part ; si ce qui est dans l'une se trouve aussi exactement dans l'autre, lorsque j'en aurai l'idée, afin que la représentation réponde à son objet, il faut que mes deux manières de penser soient en tout les mêmes, & que je n'attribue à l'un de ces corps rien que je ne conçoive pareillement dans l'autre ; quand enfin je dirai que le fondement de cette ressemblance qui doit se trouver dans mes idées, vient de la nature même des objets que je me représente, le terme d'identité n'étant que celui d'une idée vague applicable à toute comparaison que l'on fait de deux objets déterminés ; quand, dis je, je pense de cette façon, je crois m'être expliqué assés intelligiblement sur ce sujet pour que chacun puisse entendre clairement ce que je veux dire ; au lieu que personne ne voit goute dans ces rapports réalisés pour ainsi dire, & mis au nombre des êtres sans aucune nécessité.

Suivant cela, & pour me raprocher enfin

enfin de mon ſujet, je définis *raiſon* en diſant, que *c'eſt ce qu'une grandeur eſt à l'égard d'une autre par rapport à la quantité.* Les raiſons Arithmétiques ſont celles où l'on compare deux grandeurs, pour voir uniquement ſi elles ſont égales ou inégales, & combien il s'en manque qu'elles ne le ſoient. Les deux grandeurs ainſi comparées ſe nomment les termes de la raiſon, dont le prémier s'appelle, *Antecedent*, & le ſecond, *conſéquent*, antecedent; parce que c'étoit la grandeur prémièrement priſe, à laquelle j'en compare une autre; & conſéquent, celle que je compare à la prémière, ſavoir une qui vient, pour ainſi dire, à la ſuite de celle là. Enfin le reſultat de la comparaiſon, ou cette grandeur qui étant ôtée rend les deux termes égaux s'appelle la *différence.*

Il y a trois ſortes de raiſons Arithmétiques, que l'on appelle, raiſons *d'égalité*, de plus grande ou de moindre *inégalité*, & cela lorſque l'antécedent eſt égal plus grand ou plus petit que le conſéquent. Dans les raiſons d'égalité, pour avoir le prémier terme, il n'y a qu'à prendre le ſecond, car la différence étant zero : c'eſt-à-dire, n'y aiant point

point de différence, celui qui prend l'un a précisément la même valeur que s'il prenoit l'autre. Quand aux raisons de plus grande inégalité, il faut ajoûter la différence au conséquent pour avoir l'antécedent, & la retrancher de l'antécedent pour avoir le conséquent. Au contraire dans les raisons de moindre inégalité, on doit retrancher la différence du conséquent afin d'avoir l'antécedent, & l'ajoûter à celui-ci pour avoir celui-là.

Les raisons d'égalité ne sont pas, à proprement parler, des raisons Arithmétiques, puisqu'il n'y a aucune *différence*, mais rien n'empêche qu'on ne puisse les mettre de ce nombre, dès que l'on prendra pour différence zero, comme si c'étoit une véritable grandeur. Par ce moien on y remarquera aisément toutes les proprietés de celles qui ont une quantité, pour différence.

Aiant quatre grandeurs, si la différence de la prémière à la seconde, est la même que celle de la troisième à la quatrième, il y a deux raisons qui sont égales. Mais si la différence des deux prémières est plus grande ou plus petite que celle des deux dernières, la prémière raison est plus grande que la secon-

conde. Les différences déterminent donc la nature des raiſons, & tiennent lieu d'unité pour les comparer entr'elles. Car les raiſons Arithmétiques ſont égales, plus grandes, plus petites, multiples ou aliquotes les unes des autres, préciſément comme leurs différences. De là vient que ces ſortes de raiſons ſont des quantités, & pour juger de leur grandeur on ne fait point attention à ce que valent les termes dont elles ſont compoſées, mais à ce qui doit reſter en ôtant l'un de l'autre. Les raiſons Arithmétiques peuvent donc être entr'elles auſſi en raiſon Arithmétique, mais on n'y a égard principalement que lorſqu'elles ſont en raiſon d'égalité ; alors cette égalité de raiſons, ſe nomme proportion, & les quatre termes qui la compoſent ſont dits être en proportion, ou grandeurs proportionelles. Il faut prendre garde ici que deux raiſons pour être égales doivent avoir non ſeulement une même différence, mais encore que les termes ſoient rangés convenablement. Par exemple 2. 3. 7. 8, ſi je mettois 2. 3. 8. 7, les différences ſeroient bien toujours égales parce que celle de 7 à 8 eſt la même que de 8 à 7, les raiſons ne ſeroient pour-

pourtant pas les mèmes abſolument partant, puiſque l'une feroit de plus grande, & l'autre, de moindre *inégalité.* Il faudra donc pour que les deux raiſons ſoient les mêmes & égales, qu'elles aient toutes la même différence, & que les antécedents ſoient tous égaux, plus grands ou plus petits que leurs conſéquents. Il eſt vrai qu'on n'y fait pas toujours attention, mais ſouvent l'égalité des raiſons emporte une parfaite identité.

Deux raiſons égales à nne troiſième ſont égales entr'elles. Cela ſuit de cet axiome qui établit la même vérité à l'égard des grandeurs abſolues : or les raiſons ſont des grandeurs comme nous venons de le voir, donc &c. De plus, la différence de la prémière grandeur à la ſeconde, étant la même que celle de la cinquième à la ſixième, qui eſt encore égale à celle des deux précédentes, il faut que ſi le prémier antécedent eſt plus grand que ſon conſéquent, & par là même le troiſième plus grand que le ſien, le ſecond le ſoit encore de même, autrement la ſeconde raiſon ne feroit pas la même & égale à la troiſième contre la ſuppoſition.

Toutes les raiſons d'égalité ſont égales entr'elles, parce que leur différence eſt

eſt toujours zero, & que jamais l'antécedent ne peut être ni plus grand ni plus petit que ſon conſéquent. Il y a trois ſortes de proportions, puiſque par la définition c'eſt l'égalité de deux raiſons, d'où il s'enſuit manifeſtement que ſi l'on en prend deux égales de chaque eſpèce, on aura autant d'eſpèces de proportions, qu'il y a de ſortes de raiſons, & elles retiennent de plus le même nom.

Les proportions d'égalité peuvent ne comprendre qu'une ſeule grandeur; car une grandeur eſt égale à elle-même, ainſi on aura *a. a: a. a.* On en aura deux ſi l'on fait *a. a: b. b.* Il y a de plus certaines proportions qui n'ont que trois termes; on les appelle *continues*, & il faut pour cela, que la prémière grandeur ſoit à la ſeconde, comme la ſeconde eſt à la troiſième, par exemple *a, b: b, c*, 6. 5: 5. 4, 6. 8: 8. 10. Vous voiés par là que les proportions d'égalité ont toujours une ou deux grandeurs, & que les continues doivent être compoſée de trois, ce ne ſont donc que les raiſons de plus grande ou de moindre inégalité qui puiſſent les former. Enfin celles qui contiennent quatre grandeurs iné-

inégales s'appellent plus particuliérement *discretes*, parce que tous leurs termes sont différens les uns des autres, comme 6. 7: 8. 9, ou 12. 11: 5. 4. Il est bien clair encore qu'avec deux raisons d'egalité on ne peut faire une proportion discrete.

Le prémier antécedent, & le second conséquent d'une proportion s'appellent les *extrêmes*, & le prémier conséquent avec le second antécedent se nomment les *moiens* de cette proportion. Mais dans une proportion continue, comme il n'y a que trois grandeurs, les extrêmes sont la prémière & la troisième, la seconde tenant lieu des deux *moiens*, aussi l'appelle-t-on terme moien, ou moien proportionnel. Dans toute proportion la somme des extrêmes est égale à celle des moiens. C'est ce que l'on va démontrer séparément de chaque espèce de proportions. 1°. Dans les raisons d'égalité, le prémier antécedent & le second conséquent, somme des extrêmes, c'est le prémier conséquent & le second antécedent, somme des moiens, comme on le peut voir par la simple définition des termes: donc la somme des extrêmes est égale à celle des moiens dans toutes les

les raiſons d'égalité. 2°. Dans les raiſons de plus grande inégalité, le prémier antécedent, & le ſecond conſéquent ſont égaux à la ſomme des deux conſéquents & de la différence; de même le prémier conſéquent & le ſecond antécedent valent encore cette ſomme, puiſque la différence du ſecond antécedent au ſecond conſéquent eſt la même que celle du prémier au ſien; donc ces deux ſommes c'eſt-à-dire celle des extrêmes & celle des moiens égales à une même troiſième ſont égales entr'elles. 3°. Dans les raiſons de moindre inégalité, le prémier antécedent & le ſecond conſéquent, c'eſt la ſomme des deux antécedents & de la différence, & cette même ſomme eſt égale à celle des moiens, puiſque c'eſt le prémier conſéquent & le ſecond antécedent, donc &c. Et c'eſt ce qu'il falloit démontrer, car la propoſition eſt univerſellement vraie, dès que nous l'avons fait voir de toutes les ſortes de proportions.

Il ſuit de là, que dans une proportion continue, la ſomme des extrêmes eſt égale au double du terme moien. Connoiſſant trois termes d'une progreſſion Arithmétique, on pourra toujours trou-

ver le quatrième. Car la valeur des deux prémiers étant donnée & ſachant quelle eſt leur différence, il n'y a qu'à prendre une valeur égale à la troiſième ſi c'eſt une proportion d'égalité; ſi non, ajoûter ou retrancher la différence connue, du troiſième terme, ſuivant qu'on aura une raiſon de plus grande ou de moindre inégalité; ce qui donnera la valeur du terme cherché, comme il eſt évident. On peut auſſi par la propoſition précédente découvrir ce quatrième terme qui doit être ou l'un des extrêmes ou l'un des moiens (car on peut diſpoſer les termes d'une progreſſion d'une telle façon que châcun devienne le quatrième) or dans l'un & l'autre de ces cas, on a toujours la ſomme des extrêmes ou des moiens; & retranchant de celle qui eſt connue, le terme ſeul qui eſt auſſi connu, le reſte ſera la valeur du quatrième terme, puiſque les deux pris enſemble ſavoir, le *retranchant & le retranché* ſont égaux à la ſomme connue. Ainſi, le prémier terme manquant, on ôtera le dernier des extrêmes de la ſomme des moiens: ſi c'eſt le ſecond, la ſomme des extrêmes eſt donnée, & il en faut retrancher le troiſième terme. Pour avoir le

le troisième, on prend encore la somme des extrèmes dont on ôte le second terme; & enfin on trouvera le quatrième, en faisant que la somme des moiens se trouve diminuée du prémier des extrêmes. Tout cela fondé, sur ce que ces deux sommes étant égales, ce qu'on ôte de l'une, donne le même reste que si on l'ôtoit de l'autre.

Ayant plusieurs grandeurs toutes inégales, telles que la différence de la prémière à la seconde, soit la même que celle de la seconde à la troisième, que celle de la troisième à la quatrième, & ainsi de suite, toutes ces raisons étant égales entr'elles, en sorte que les grandeurs augmentent, ou diminuent toujours d'une même quantité; ayant, dis-je, une suite de grandeurs semblables, je dis qu'elles sont en progression Arithmétique. On voit d'abord que c'est un assemblage de proportions continues qui entrent pour ainsi dire les unes dans les autres, & qui se suivent immédiatement; car les trois prémiers termes sont une proportion, les trois suivants de même, & ainsi de trois en trois. Il y a plus; car outre que les trois prémiers en sont une, on en a aussi dans les trois qui sui-

ſuivent le prémier, dans les trois qui ſuivent le ſecond &c.

Il n'y a que deux ſortes de progreſſions, parce que les raiſons d'égalité laiſſeroient toujours le prémier terme tel qu'il eſt, & ce ne ſeroit plus un avancement ni une progreſſion ; d'ailleurs il faut que ces grandeurs ſoient toutes inégales entr'elles ſuivant la définition, il n'y a donc que les deux autres ſortes de raiſons qui puiſſent former une progreſſion, auſſi n'en fait-t-on que de deux eſpèces, celles qui vont en montant, & celles qui vont en diminuant. Dans toutes en général châque grandeur eſt appellée un terme de la progreſſion, & la différence qui ſe trouve entre deux termes conſécutifs eſt dite *regner* dans cette progreſſion.

Une progreſſion ne commence, à proprement parler, de prendre ce nom que quand elle a pour le moins quatre termes; car *deux*, ne font qu'une raiſon arithmétique, & *trois*, une proportion continue : mais dans quatre grandeurs on a tout ce qu'il faut pour une véritable progreſſion, ſavoir pluſieurs grandeurs inégales, une différence qui eſt la même par tout, trois raiſons & deux pro-

por-

portions continues, puisque la prémière grandeur est à la seconde, comme la seconde est à la troisième, & la seconde est à la troisième comme la troisième est à la quatrième. Ainsi la plus petite progression, eu égard au nombre des termes, est celle qui en a quatre.

Supposons que la progression aille en augmentant, je prens d'abord une grandeur quelconque pour le prémier terme, la seconde sera ce prémier terme plus une certaine différence, la troisiéme sera le second avec la même différence; il en sera ainsi du quatrième, du cinquième &c. On peut dire par conséquent, que châque terme, à la reserve du prémier, c'est le précedent plus la différence, & le suivant, moins cette même différence. Par contre dans une progression qui va en diminuant, châque terme, excepté le prémier, sera le précedent moins, & le suivant, plus la différence.

Le prémier & le dernier terme d'une progression Arithmétique s'apellent les extrêmes, & les autres sont les termes moiens.

Il y a cinq choses principales à considerer dans une progression Arithmétique; 1°. le prémier terme; 2°. le dernier;

3°. la différence; 4°. le nombre des termes; 5°. la somme de la progression.

Quand on n'a que le prémier terme d'une progression, avec le nombre des termes qu'elle doit avoir, elle est encore indéterminée; c'est-à-dire, que l'on peut satisfaire à la question en plusieurs manières; car la différence est alors arbitraire, & il n'y a qu'à l'ajoûter au dernier que l'on a, pour avoir le terme suivant. Mais la progression est donnée quand les deux prémiers termes, ou ce qui est la même chose, lorsque le prémier & la différence sont connus: car on n'en peut trouver qu'une seule qui ait les conditions requises: en effet, dès que la différence est donnée, ajoûtée au prémier terme on a le second, & ajoûtée au second on a le troisième &c. de sorte que pour avoir une autre progression, il faudroit prendre une différence plus ou moins grande que celle dont il s'agit; ce qui ne se peut puisqu'elle est donnée. Que si avec cela on donne le nombre des termes, la progression est alors entiérement déterminée, & tous ses termes peuvent être exprimés numériquement. Comme si, par exemple, on me donnoit pour pré-

prémier terme 8, pour différence 10, & pour nombre des termes 4, il eſt clair que dans ce cas on auroit ÷ 8. 18. 28. 38. Quand aux progreſſions qui vont en diminuant, nous les examinerons après celles-ci, & cela pour plus grande facilité, quoi qu'au fond les proprietés en ſoient à peu près les mêmes, n'y ayant pour l'ordinaire qu'à retrancher là où l'on ajoûte dans les autres, & à ajoûter là où l'on retranche; c'eſt-à-dire à changer les ſignes des grandeurs, comme nous le verrons en ſon lieu.

NEANDER. Je n'en ſuis pas faché, & je repaſſerai ainſi avec plus de plaiſir ce que nous aurons fait.

MATHESIUS. Je commence donc par les progreſſions qui vont en augmentant, parce qu'elles ſont les plus naturelles, & que ce terme de progreſſion ſemble leur convenir en quelque façon mieux qu'aux autres. Le prémier Théorème qu'il nous faut démontrer eſt celui-ci *chaque terme d'une progreſſion à la reſerve du prémier, c'eſt le prémier plus le produit de la différence par le nombre des termes qui le précédent.* Cela ſuit de la nature même de la progreſſion; car puiſque châque terme, excepté le prémier, eſt le

précédent plus la différence, il eſt certain, que le ſecond terme étant celui où l'on commence à prendre la différence une fois, & que comme toutes les fois qu'on ajoûte un terme à la progreſſion on prend la différence, il faut que châque terme de la progreſſion qui n'eſt pas le prémier, ſoit la valeur du prémier, & celle du produit de la différence par le nombre des termes qui le précédent: en effet, ceux qui le précédent ſont les termes de la progreſſion depuis le prémier juſques à lui moins *un*, il ſe manquera donc toujours l'unité que l'on n'ait le nombre des termes dont celui-ci ſoit le dernier. Car ſi on ne le compte pas en parlant du nombre des termes qui le précédent, par contre on ne compte jamais non plus le prémier pendant que l'on y comprend le terme en queſtion, à cauſe que pour l'avoir il faut encore ajoûter la différence tout comme pour les autres.

Un corollaire de cette propoſition, c'eſt que le dernier terme d'une progreſſion eſt égal au prémier plus le produit de la différence par le nombre des termes moins un.

Les propoſitions ſuivantes ſont encore

re fondées sur celle-ci, savoir; 1°. que connoissant le dernier terme, le nombre des termes & la différence, on pourra trouver la valeur du prémier terme. Car par le corollaire précédent, le dernier terme est égal au prémier plus le produit de la différence par le nombre des termes moins un; or je connois ces deux facteurs puisqu'ils sont pour ainsi dire donnés; il n'y a donc qu'à ôter du dernier terme la valeur de ce produit, & le reste sera le prémier terme. 2°. Connoissant le prémier terme, le nombre des termes & la différence, on aura le dernier, si on ajoûte au prémier un produit fait de la différence & du nombre des termes moins un. 3°. Ayant le prémier terme & le dernier avec le nombre des termes, connoitre la différence. Il faut ôter le prémier du dernier, le reste, produit de la différence par le nombre des termes moins un, étant divisé par ce second facteur, donnera pour quotient la différence qui est la grandeur que l'on cherchoit. 4°. Si on a le prémier terme, le dernier, & la différence, on trouvera le nombre des termes en ôtant le prémier du dernier, & divisant le reste par la différence, le

quotient ſera le nombre des termes moins un, auquel ajoûtant l'unité on aura ce que l'on demandoit. 5°. Le prémier & le dernier terme étant donnés avec la différence ou le nombre des termes, trouver tous les interpoſés entre les extrêmes, c'eſt-à-dire les termes moiens, & par conſéquent toute la progreſſion. Je retranche d'abord le prémier terme du dernier, & ſi la différence m'eſt connue, je verrai auſſi-tôt quel eſt le nombre des termes, après quoi il n'y aura rien de plus facile que de découvrir tous les autres: mais ſi c'eſt la différence qui me manque, pour lors je diviſe le dernier terme moins le prémier par le nombre des termes moins un, & le quotient me donnera la différence, comme nous venons de le voir, au moien de laquelle on pourra connoitre de la même manière, comme on le demandoit, tous les termes interpoſés entre le prémier & le dernier déja connus. 6°. Le prémier terme d'une progreſſion étant donné avec la différence, trouver un terme propoſé de cette progreſſion. Nous avons vû que tout terme qui n'étoit pas le prémier, étoit égal à ſa valeur & à celle du produit de la différence par le nombre des

des termes qui le précedent: un terme de la progression étant donc proposé pour en connoitre la valeur, je multiplie la différence par le nombre des termes qui précédent celui que je cherche, & ajoûtant la valeur du prémier terme à ce produit, j'ai le terme proposé. 7°. Le prémier terme d'une progression étant donné avec la différence qui y règne, trouver le quantiéme terme de la progression est un certain nombre proposé. Il faut retrancher le prémier terme du nombre proposé, & diviser le reste par la différence, le quotient sera le nombre des termes qui précédent le terme donné; c'est pourquoi ajoûtant l'unité à ce quotient, on a le nombre des termes de la progression, ou de cette partie qui finit par le nombre donné: c'est à-dire, que je connoitrai par là le rang qu'il tient dans cette progression, & le quantiéme terme il doit être.

Dans toute progression, *la somme des extrêmes est égale à celle de deux termes également éloignés des extrêmes.* Et d'abord, je dis que les deux extrêmes pris ensemble valent autant que le second terme & le pénultiéme aussi pris conjointément; car la somme des extrêmes, c'est

le prémier terme, le pénultiéme & la différence : le second terme c'est le prémier plus la différence, auquel si on ajoûte le pénultiéme, on a une somme égale à celle des extrêmes. Il en sera de même de deux autres termes également éloignés des extrêmes, parce que le prémier de ces deux sera égal au prémier extrême, plus le produit de la différence par le nombre des termes qui sont avant lui ; or le dernier des extrêmes, c'est le second des moiens, plus le produit de la différence par le nombre des termes qui les précédent, en prenant pour prémier terme le second des moiens. Mais puisqu'on les suppose tous deux également éloignés des extrêmes, la différence est prise autant de fois dans le prémier des moiens que dans le second des extrêmes, & comme ces deux *multipliés* égaux ont aussi des *multipliants* égaux, les produits ne peuvent qu'être les mêmes : par conséquent, l'on aura pour somme des extrêmes le prémier des extrêmes, plus le second des moiens, plus la différence prise un certain nombre de fois ; & les deux moiens seront le prémier des extrêmes, la même différen-

ren-

rence prise le même nombre de fois, plus le second moien ; ces grandeurs sont les mêmes, les sommes seront donc égales, ce qu'il falloit démontrer.

Le nombre des termes de la progression étant impair, le double du terme du milieu est précisement égal à la somme des extrêmes.

Dans toute progression, si le nombre des termes est pair, il est évident que la somme des extrêmes, celle du second & du pénultiéme, celle du troisième & de l'antepénultiéme, & les autres étant prises ainsi de suite jusqu'à ce que tous les termes soient pris deux à deux ; on aura autant de fois la valeur de la somme des extrêmes, qu'il y a d'unités dans la moitié du nombre des termes de la progression. En effet, ce sera prendre cette somme autant de fois que deux se trouvera dans le nombre des termes ; ainsi la somme de la progression sera dans ce cas le produit de la somme des extrêmes par la moitié du nombre des termes. Le nombre des termes étant impair, celui du milieu multiplié par le nombre entier donnera la même somme, savoir, celle de la progression ; & en général quelque que puisse être le nombre

des termes, on aura toujours la moitié de la somme des extrêmes multipliée par le nombre des termes; parce qu'aiant deux facteurs, & prenant la moitié de l'un avec le double de l'autre, le produit demeure le même. Mais avant que d'aller plus loin, pourriés vous démontrer ces deux propositions que vous devés savoir, dont la prémière est que si *l'on double le diviseur, le quotient est la moitié de ce qu'il étoit auparavant:* la seconde, que *le double d'un facteur & la moitié de l'autre, donnent le même produit qu'on avoit déja eu, sans faire aucun changement à ces grandeurs.*

NEANDER. Je suppose d'abord que la division est exacte, & qu'on vienne ensuite à doubler le diviseur, il est clair qu'il fera un retranchement double de ce qu'il étoit auparavant, & qu'ainsi au lieu de deux unités que l'on mettoit au quotient, il n'y en aura qu'une seule; ce qui fait que la somme des retranchements du dernier diviseur sera la moitié du quotient de la division précédente. Quand à la seconde proposition, on voit sans peine que la moitié du multipliant donne la moitié du produit, & que le double du multiplié donne aussi

le

le double de ce même produit : or chaque fois que l'on prend le multiplié, on a le double du précédent ; il faut donc s'arrêter là où l'on auroit eu la moitié du produit dans le prémier cas, parce que l'autre moitié s'y trouvera dans ce dernier ; c'eſt-à-dire donc, qu'il ne faut que la moitié du multipliant, lorſque le multiplié a augmenté du double.

MATHESIUS. Cela va fort bien, & je vois avec plaiſir que vous faites des progrès dans cette ſcience ; car elle eſt telle que l'on s'apperçoit bien-tôt, ſi l'on y fait des progrès ou non, & ſi on l'étudie comme il convient. La propoſition que nous avons démontrée peut auſſi être conçue de cette façon. La ſomme des extrêmes, c'eſt le double du prémier terme plus le produit de la différence par le nombre des termes moins un ; il faut donc que la ſomme de la progreſſion, ſoit égale aux produits du double du prémier terme par la moitié du nombre des termes, & du produit de la différence multipliée par le nombre des termes moins un, auſſi par le même facteur. Pour le prémier produit qui eſt le prémier terme multiplié par le nombre des termes, il eſt

clair qu'étant ôté de la somme de la progression, il doit rester la différence, le double, le triple, le quadruple &c. jusqu'au dernier terme: mais la différence ne se trouve que dans le second, parce qu'on a ôté le prémier terme du prémier, après quoi le reste est zero, & qu'on l'a ôté encore de tous les autres, ainsi quand je prends la somme des extrêmes, j'ai zero &c. plus le produit de la différence par le nombre des termes moins un; savoir, pour prémière prise, le dernier terme & le prémier o, c'est-à-dire, le dernier seulement; pour seconde prise, le pénultiéme & le second, mais le pénultiéme c'est le dernier moins un, & cette unité savoir la différence se trouve prise dans le second terme: on a donc deux fois le produit dont nous parlons, en ôtant les deux prémiers & les deux derniers termes. Je prends de plus l'antepénultiéme & le troisiéme; il s'en manque deux fois la différence que l'on n'ait le dernier, mais cela se trouve dans le troisième terme, & ainsi de suite, jusqu'à-ce que l'on ait pris enfin les deux qui se suivent, quand le nombre des termes est pair. Ce qui achève d'ôter le tout, & donne pour second

pro-

produit celui dont nous avons parlé. Or quand le nombre des termes est impair, on ne peut pas opérer de la même manière, & dans ce cas il faut se servir de la méthode que nous venons d'indiquer, qui est de doubler un facteur, & de prendre la moitié de l'autre.

On peut commencer une progression par zero, qui sera de cette façon le prémier terme ; le second devra donc être la différence, & il ne sera pas difficile d'y remarquer les mêmes proprietés que nous venons de voir dans celles qui commencent par une quantité. La différence d'un nombre à zero ou à rien, peut être égale à la différence d'un autre nombre à ce prémier, & ainsi de suite, c'est-à-dire, qu'un nombre peut surpasser la valeur d'un autre de toute la sienne, & être ainsi double de celui-là. Remarquons seulement qu'alors la différence étant égale au second terme, tous les suivans sont ses multiples, & que dans ces sortes de progressions le produit du dernier terme par le nombre des termes est double de la somme de la progression, parce que le dernier terme est le produit de la différence par le nombre

des termes moins un, à cauſe que le prémier terme zero n'augmente ni ne diminue, quoiqu'il ſoit ajoûté ou retranché d'une grandeur. Pour une fois donc que je prends ce produit, j'ôte deux termes de la progreſſion ; pour l'avoir encore une fois, je prends le ſecond & le pénultiéme, & ainſi ſucceſſivement comme dans les autres, il ſe trouvera donc que le dernier terme multiplié par la moitié du nombre des termes égalera la ſomme de la progreſſion; & que pour en avoir le double, il faudra doubler le ſecond facteur en prenant le nombre des termes pour la moitié de ce nombre. On peut démontrer ceci encore plus ſimplement ; c'eſt que la ſomme des extrêmes, qui n'eſt que le dernier terme, parce que le prémier eſt zero, étant multipliée par la moitié du nombre des termes, donne, ſuivant qu'il a été démontré cideſſus, la ſomme de la progreſſion, & que par conſéquent ſi en laiſſant le prémier terme on multiplie le dernier par le nombre entier de tous les termes, on en aura le double ; & c'eſt ce qu'il falloit prouver.

Le prémier terme, la différence & le nombre des termes étant donnés, trouver

la

la somme de la progression. Il faut chercher le dernier terme qu'on trouvera par la méthode que je viens d'indiquer, savoir en ajoûtant au prémier le produit de la différence par le nombre des termes moins un. On aura après cela les deux extrêmes, & prenant la moitié de cette somme, il faudra la multiplier par le nombre des termes, le produit sera la somme que l'on cherche.

La différence, le nombre des termes, & la somme de la progression étant donnés, trouver les deux extrêmes & chacun des interposés.

La somme de la progression c'est, comme nous venons de le voir, la moitié de la somme des extrêmes multipliée par le nombre des termes. Divisant donc cette somme par le nombre des termes qui est connu, j'aurai pour quotient la moitié de la somme des extrêmes qui étant doublée me donne la somme entiére. Je connois encore la différence, & je sais de plus que la somme des extrêmes est égale au double du prémier terme, plus le produit de la différence par le nombre des termes moins un; c'est pourquoi ôtant le produit contenu dans cette somme, il reste le double du pré-

prémier terme. Je connois donc chacun des extrêmes, & la différence étant donnée, toute la progreſſion l'eſt auſſi.

Connoiſſant le nombre des termes & leur ſomme avec le prémier ou le dernier, trouver le reſte.

Je diviſe d'abord la ſomme de la progreſſion par le nombre des termes, & le double du quotient me donne la ſomme des extrêmes. Or l'un des extrêmes étant connu, je connois auſſi l'autre, de même que la différence, & par conſéquent tous les autres termes interpoſés.

Il y a encore des Problèmes ſur les progreſſions Arithmétiques que l'on nomme *indéterminés*. Mais ils trouveront leur place plus commodément ailleurs que dans cet endroit, & peut-être même n'en parlerai-je pas. Nous paſſerons maintenant aux progreſſions qui vont en diminuant, ſur leſquelles nous ne nous arrèterons pas beaucoup, parce que comme je vous l'ai déja dit, ces deux ſortes de progreſſions ont, à quelque choſe près, les mêmes proprietés. Cependant repaſſons en peu de mots ce que nous avons dit juſqu'ici, afin d'en faire une courte application à cette eſpèce que nous allons examiner. 1°. Connoiſſant

les

le prémier terme d'une telle progression avec la différence, on peut la continuer, en retranchant cette différence du terme précédent, ce qui donnera le suivant: d'où il s'ensuit que chaque terme de la progression à la reserve du prémier, est égal au prémier moins la différence multipliée par le nombre des termes qui le précédent: le dernier se trouvant par là égal au prémier moins le produit de la différence par le nombre des termes moins un. Car si on retranchoit du prémier le produit de la différence par le nombre des termes, on ôteroit la différence une fois de trop, il faudroit donc la remettre, & cela donne le prémier terme moins le produit de la différence par le nombre des termes, plus encore la différence. Si donc l'on veut chercher le prémier terme, il faut quand on a le dernier, la différence & le nombre des termes, ajoûter à ce dernier le produit de la différence par le nombre des termes moins un, il sera égal au prémier puisqu'il contient ces deux grandeurs, & que l'on en retranche une de son tout. Aiant le nombre des termes, la différence & le prémier terme, on trouve le dernier, en retranchant du prémier le pro-

produit de la différence par le nombre des termes moins un, comme il eſt évident.

On connoitra la différence; *le prémier terme, le dernier & le nombre des termes étant donnés*; ſi l'on ôte le dernier du prémier, & que l'on diviſe le reſte par le nombre des termes moins un; or ſi c'eſt le nombre des termes que l'on cherche, on diviſera ce même reſte par la différence, le quotient plus l'unité indiquera quel eſt ce nombre. Pour ſavoir le quantiéme d'une progreſſion eſt un certain terme propoſé, *le prémier terme & la différence étant donnés*, il faut ôter du prémier terme la valeur du nombre propoſé, & le reſte eſt le produit de la différence par le nombre des termes qui ſont avant celui-ci. Car ôtant le prémier terme du prémier, il ne ſeroit rien reſté, ſi l'on n'avoit retranché tout ce produit de trop, lequel il faut remettre, ce qui fait préciſément le reſte de cette ſouſtraction. Diviſant donc ce reſte par la différence, & ajoûtant l'unité au quotient, on ſaura quel rang ce terme tient dans la progreſſion &c.

Il n'eſt pas moins évident que *la ſomme des extrêmes eſt égale à celle de deux ter-*

termes également éloignés des extrêmes. Car le prémier terme est égal au dernier plus le produit de la différence par le nombre des termes moins un, puis que pour arriver au prémier terme il a fallu ajoûter la différence en commençant par le pénultiéme & finissant par ce prémier, autant de fois qu'il y a de termes excepté le dernier. Prenant donc deux termes également éloignés des extrêmes, on a le prémier terme moins la différence retranchée un certain nombre de fois, & un autre moien : or la somme des extrêmes, c'est le prémier terme, plus le second moien, moins la même différence retranchée le même nombre de fois ; mais ces sommes ayant des grandeurs qui sont toutes égales chacune à chacune, elles sont les mêmes, donc &c. De plus la somme des extrêmes ou sa moitié étant multipliée par la moitié, ou le nombre entier de tous les termes, est égale à la somme de la progression, comme dans celles qui vont en augmentant.

Le prémier terme, la différence & le nombre des termes étant donnés, je trouverai la somme de la progression en retranchant du prémier le produit qu'il con-

contient avec le dernier terme, & après avoir trouvé de cette manière les deux extrêmes, il les faut ajoûter & prendre le produit de la moitié de leur somme par le nombre des termes qui est donné. *Si la différence, le nombre des termes & la somme de la progression sont donnés*; je divise cette somme par le nombre des termes, j'ai la moitié de la somme des extrêmes; connoissant donc cette somme, j'en retranche le produit de la différence par le nombre des termes moins un, & le reste est double du dernier terme; après quoi il est aisé de connoitre le reste.

C'est ainsi qu'avec un peu d'attention sur ce qui regarde cette espèce de Progression, il sera aisé d'appercevoir la cause de leur conformité & de leur diference avec celles que nous avons examinées précédemment; sur tout si l'on prend bien garde que, sans changer la valeur de la progression, on peut la renverser, pour ainsi dire, en faisant que le prémier terme devienne le dernier. Car il est clair alors que les progressions qui alloient en augmentant, iront en diminuant, & réciproquement. On auroit pû se contenter de cette preu-

ve

ve ſans entrer dans aucun détail à ce ſujet. Mais auſſi il faut avouër qu'à moins d'être bien verſé dans les Mathématiques & dans les idées abſtraites, de pareilles démonſtrations convainquent bien l'eſprit, mais elles ne l'éclairent pas aſſés; on y ſoupçonne aiſément un manque d'exactitude qui n'y eſt pourtant pas; accoûtumés à des idées déterminées, & à des preuves bien circonſtanciées, on ſouhaitte toujours de voir les choſes telles qu'elles ſont, & d'une manière ſenſible. D'ailleurs comme il importe beaucoup de repaſſer ces ſortes de matières, & de ſe familiariſer avec ces objets pour les enviſager ſous toutes leurs différentes faces, il n'eſt pas inutile ni hors de propos de faire quelque fois de ſemblables répétitions.

Je dirai encore un mot ſur les progreſſions qui vont en diminuant, c'eſt qu'on ne les peut pas continuer à l'infini, à moins qu'il n'y ait des grandeurs négatives. Je veux dire que dans une progreſſion qui va en montant, on peut bien augmenter indéfiniment la ſomme & le nombre des termes qu'elle contient, mais qu'il n'en eſt pas de même d'une qui va en décroiſſant. Le prémier terme

me quel qu'il puiſſe être , eſt toujours une grandeur indéterminée , & ſes unités ne ſont pas un nombre infini : par conſéquent ſi je retranche toujours de ce nombre une même différence, la puiſſance de retrancher allant à l'infini & le nombre ne l'étant pas , celui des retranchemens doit être fini , puiſque le nombre même de ſes unités l'eſt néceſſairement. Que ſi je prends enfin des grandeurs négatives, alors cette progreſſion pourra être continuée à l'infini ; car au terme où la prémière quantité eſt épuiſée par les retranchements continuels qu'on a fait de ſa quantité, il ne reſtera rien, ou le reſte ſera moindre que la différence, il faudra alors ôter la différence ou une de ſes parties de zero , & le reſte ou terme ſuivant ſera une grandeur négative. Or retranchant toujours la différence poſitive d'une grandeur négative, on aura dans les termes ſuivants des grandeurs négatives qui iront en augmentant juſqu'à l'infini, & l'on ne peut y aſſigner de dernier terme. Il eſt donc clair qu'en ſe ſervant ainſi de grandeurs négatives, on ne change rien à la différence, ni aux autres conditions requiſes. Ce ne

fera

ſera pas, ſi vous voulés, un retranchement proprement dit, mais la différence aura toujours ſa prémière valeur, & les propriétés qui ſe trouvoient dans la progreſſion lorſque tous les termes étoient poſitifs, ne changent pas, à cauſe que tout ce que nous avons dit eſt fondé ſur l'égalité des différences qui ſe trouvent entre des termes conſécutifs & ſur ce qu'il falloit ajoûter ou retrancher pour avoir tel ou tel terme. Cependant je vai donner quelques exemples de ces progreſſions. Soit cette progreſſion dont le prémier terme eſt 100, la différence 20 & le nombre des termes 11. On aura $\div$ 100. 80. 60. 40. 20. 0. $-$ 20. $-$ 40. $-$ 60. $-$ 80. $-$ 100. Le terme du milieu 0 étant multiplié par le nombre des termes, il donne pour produit $11 \times 0 = 0 = 100 - 100 = 80 - 80 = 60 - 60 = 40 - 40 = 20 - 20$, termes également éloignés des extrêmes. La ſomme de la progreſſion doit être $\frac{100 - 100}{2} \times 11 = 0$, & effectivement la ſomme eſt 0. La ſomme des extrêmes $100 - 100$ eſt égale au double du dernier terme $-$ 100 plus le produit de la différence 20 par

10,

10, c'est-à-dire, 100 — 100 = 200 — 200. Ayant 100 & — 100 pour extrêmes, & 11 pour nombre des termes, on cherche la différence. J'ôte — 100 de 100, ce qui fait 200 & je divise ce reste par 10 = 11 — 1, le quotient 20 est la différence. La différence, le nombre des termes & la somme de la progression sont donnés, on cherche le reste: je divise 0: 2 par 11, le quotient 0 est la somme des extrêmes. J'ôte de cette somme le produit de la différence 20 par le nombre 10, c'est-à-dire, je fais 0 — 200 = — 200 qui vaut le double du dernier terme. Je sais donc que ce dernier est — 100, & que le prémier est 100, après quoi tout le reste se connoit aisément.

Soit une seconde progression ÷ 12. 7. 2. — 3. — 8. — 13: alors 12 — 13 = — 1 = 7 — 8 = 2 — 3 &c. Je finis ici ces deux sortes de progressions, reservant pour une leçon suivante de vous achever cette matière, parce que j'ai encore à vous proposer quelques espèces particuliéres de progressions Arithmétiques, & sur lesquelles je m'étendrai aussi briévement qu'il me sera possible.

ENTRETIEN XI.

MATHESIUS.

UNe progreſſion peut commencer par zero, comme nous l'avons vû, & avoir une grandeur pour ſecond terme, qui ſe trouve alors la même que la différence. Mais quand c'eſt l'unité, ou qu'on la prend pour prémier terme auſſi bien que pour la différence, elle reçoit le nom de *progreſſion naturelle*, parce que l'on a tous les nombres pris dans leur ordre naturel. Or comme cette eſpèce de progreſſion a quelques proprietés particuliéres, il ne ſera pas inutile d'en dire ici quelque choſe.

La prémière qui ſe préſente eſt celle-ci, *le dernier terme plus l'unité, eſt égal au prémier plus le nombre des termes.* Nous avons vû auparavant que le dernier terme eſt toujours égal au prémier plus le produit de la différence par le nombre des termes moins un, & la différence étant ici l'unité, le dernier terme ne ſera que le prémier & le nombre des termes moins un, ajoûtant l'unité

de part & d'autre, on a le dernier terme plus l'unité égal au nombre des termes, plus le prémier terme: & ceci se trouve vrai de toutes les progressions qui commencent par zero ou par l'unité, ou par quelque autre nombre, pourvû que la différence soit toujours l'unité: car 1°. ayant ÷ 1. 2. 3. 4. 5. 6. on a $6 = 1 + 1 \times 5$. 2°. Dans le cas où l'on auroit ÷ 0. 1. 2. 3. 4. 5. $5 + 1 = 6$ nombre des termes. 3°. Ayant celle-ci ÷ 12. 13. 14. 15. 16. 17. $17 + 1 = 12 + 6$. En effet, lorsque la progression commence par zero, puisque le dernier terme plus l'unité est égal au nombre des termes plus le prémier, & que ce prémier est zero, il est bien évident que le dernier terme plus l'unité est égal au nombre des termes. D'ailleurs zero commencant la progression, le second terme se trouve être l'unité, aussi bien que la différence, & le dernier, c'est l'unité prise autant de fois qu'il y en a dans le nombre des termes moins un: c'est pourquoi ajoûtant l'unité au dernier, on a le nombre entier de tous les termes. Dans le second cas, le dernier terme c'est le prémier, plus le nombre des termes moins un multiplié

par

par la différence, c'est-à-dire que le dernier terme est égal au prémier, plus le nombre des termes moins un : car ce prémier c'est l'unité, & la différence multipliée par le nombre des termes auroit donné l'unité de plus. On a donc le dernier terme égal au nombre des termes.

Le terme qui suivroit le dernier dans une progression est égal au prémier plus le nombre des termes, soit que la progression commence par zero, soit qu'elle commence par l'unité. Ce terme là, c'est le dernier plus l'unité: or le dernier plus l'unité c'est le prémier, plus le nombre des termes moins un plus l'unité, c'est-à-dire le prémier, plus le nombre des termes, ce qu'il falloit démontrer. Et supposant que le prémier terme est zero, le terme qui suivroit le dernier est égal au nombre des termes; si c'est l'unité qui commence la progression, alors comme nous avons vû, le dernier est égal au nombre des termes, & si on ajoûte l'unité à ce dernier, on a le terme qui suivroit le dernier égal au prémier, plus le nombre des termes, comme il le falloit.

Le prémier terme étant zero, le quar-

ré du dernier terme, & ſa racine ſont égaux au double de toute la progreſſion. Nous avons démontré que la ſomme des extrèmes multipliée par la moitié du nombre des termes, donne la ſomme entiére de la progreſſion, d'où il s'enſuit qu'on en aura le double ſi l'on prend pour multipliant le nombre des termes. Mais le prémier terme étant zero, cette quantité ne ſera plus que le nombre des termes multiplié par le dernier, & le nombre des termes ſera le dernier plus l'unité: on aura donc pour produit le quarré du dernier terme, plus la racine égal au double de la progreſſion.

Le prémier terme étant encore zero, le quarré de celui qui ſuivroit le dernier moins une fois ſa racine eſt égal au double de la progreſſion. Puiſque le prémier terme eſt zero, celui qui ſuivroit le dernier, c'eſt ce prémier plus le nombre des termes, moins un plus un, c'eſt-à-dire le nombre des termes: pour avoir donc le dernier terme, il faut ôter l'unité du nombre des termes, ce qui donne le terme qui ſuivroit le dernier moins l'unité plus le prémier zero, ſomme des extrêmes, laquelle multipliée par le nombre des termes, ſavoir celui qui

ſui-

ſuivroit le dernier, donne pour produit le quarré du terme qui ſuivroit le dernier moins ſa racine, égal au double de la progreſſion.

Dans la progreſſion naturelle, ſi l'on ajoûte à un quarré le double de ſa racine plus l'unité, on aura le quarré ſuivant, c'eſt-à-dire celui du terme qui ſuit immédiatement la racine de ce prémier. Pour le prouver, je dis que puiſque la différence de deux termes qui ſe ſuivent eſt toujours l'unité, il faut voir quel ſera le quarré d'une racine à laquelle on vient d'ajoûter l'unité. Ce qui n'eſt pas difficile à connoitre, car en ajoûtant l'unité au multiplié, on a le multipliant; ajoûtant enſuite l'unité au multipliant, on a le multiplié nouveau qui eſt le précédent déja augmenté de l'unité, ce qui donne outre le prémier produit ou quarré, la ſomme des deux facteurs, c'eſt-à-dire le double de la racine plus l'unité. Donc &c. ce qu'il falloit démontrer.

Il n'eſt pas moins évident, que *pour avoir un quarré dont la racine ſoit moindre que la précédente de l'unité, il n'y a qu'à en retrancher le double de la racine moins l'unité.* Car ôtant l'unité du multiplié, j'ôte du produit le multipliant,

& du multipliant si je retranche l'unité, j'ôte encore le multiplié, c'est-à dire celui dont on a retranché l'unité, ce qui fait le double de la racine moins l'unité : or si l'on ajoûte au produit l'unité & qu'on ôte le double de sa racine, ce sera la même chose, parce qu'ôtant ce double, il auroit fallu remettre l'unité qui s'y trouve déja dans cette supposition.

Le quarré d'un terme de la progression naturelle est égal au double de tous les termes qui le précédent, plus le quarré du prémier, plus la difference qui règne dans cette progression multipliée par le nombre des termes qui précédent celui qui est donné. Nous venons de voir que dans la progression naturelle, le quarré d'un terme, c'est celui du terme précédent avec le double de la racine plus l'unité. Ainsi le quarré du terme donné est égal au double du terme précédent plus l'unité, plus le quarré de ce même terme précédent, c'est-à-dire, par la même raison au double du terme antécédent de deux plus l'unité, & au quarré de ce même terme, qui vaut encore le double du terme antécédent de trois plus l'unité plus le quarré de ce même terme,

me, & ainſi de ſuite juſqu'à ce que l'on ſoit arrivé au prémier terme. Alors le quarré du prémier terme lui ſera égal, ou ce qui eſt la même choſe à ſon quarré, & ajoûtant le double du prémier terme plus l'unité, on aura le quarré du ſecond terme; après quoi on continuera de la même manière juſqu'au terme donné. Ce qui étant fait, on voit évidemment que le quarré du terme de cette progreſſion contient 1°. le quarré du prémier. 2°. Le double de tous les termes qui précédent le terme donné; car on prend le double du prémier, du ſecond &c. & l'on finit par le double du pénultiéme. 3°. On a la différence priſe autant de fois qu'il y a de termes qui précédent celui qui eſt donné, puiſque l'on prend l'unité pour avoir le ſecond terme, on la joint au ſecond pour avoir le troiſième, & enfin au pénultième pour avoir le dernier.

Si on ajoûte à un nombre cubique le triple du quarré de ſa racine plus le triple de la même racine plus l'unité, cela fera une ſomme égale au nombre cubique qui ſuit de plus près le cube propoſé. Car puiſque dans une racine à laquelle on ajoûte l'unité, le quarré qu'elle donne, vaut ou-

tre le précédent, le double de sa racine & l'unité, il faut encore multiplier cette valeur par la même racine du quarré précédent plus l'unité ; & commençant par multiplier la racine prémière du second facteur par le prémier, j'ai le cube du prémier terme, le double du quarré de ce même terme plus ce terme lui-même, & multipliant l'unité, seconde partie de l'autre des facteurs, encore par ce même prémier, on a le quarré du terme précédent, le double de sa racine & l'unité, lesquels produits partiaux, ainsi qu'on peut le voir, font la valeur dont nous parlons ; & cette valeur est celle d'un cube dont la racine a l'unité de plus que celle du précédent. Si l'on veut prendre la peine de se rendre ces opérations familières, on verra par les raisons que nous avons apportées ci-dessus, que le cube d'un terme de la progression naturelle est égal. 1°. Au cube du prémier terme. 2°. Au triple des quarrés des termes qui le précédent. 3°. Au triple de la somme des termes qui sont avant lui. 4°. A l'unité prise le même nombre de fois qu'il y a de termes moins un. Ce qui rend cette proposition un peu difficile, n'est autre cho-

se

ſe que la multitude des idées qu'il faut avoir bien préſentes & bien familières pour les comprendre d'une ſeule vûe ; & comme châcun peut lui-même ſe procurer l'attention néceſſaire pour cela, je me diſpenſe auſſi de vous la démontrer.

On pourroit encore trouver ſans beaucoup de peine un grand nombre de propoſitions ſemblables. Mais outre que par les principes que nous avons déja établis, il eſt aiſé d'en donner la démonſtration, c'eſt que de plus on ne ſauroit tirer de grandes utilités de tous ces théorèmes. Or il vaut mieux dans un prémier cours d'Algèbre s'arrêter à ce qui eſt fondamental & qui peut ſervir de baſe à des connoiſſances plus vaſtes & à des recherches plus importantes. Il ſe trouve des gens qui dès que le hazard les a une fois enfilé dans une certaine route ne ſavent plus en revenir ; ils continuent toujours leur chemin, & n'en reviennent que lors qu'ils croient avoir été juſqu'au bout. Ce n'eſt pourtant pas là le véritable moien de réuſſir ſûrement dans une ſcience ; ſouvent on s'engage dans une matière que l'on prétend mettre dans tout ſon jour lors

même que l'on manque encore de certaines connoiſſances qui ſont très néceſſaires & d'un uſage à peu près indiſpenſable pour le but que l'on ſe propoſe.

Il y a encore une autre ſorte de progreſſion que l'on appelle, *progreſſion des nombres impairs*, & que nous devons auſſi examiner. Mais avant que de l'entreprendre, il faudra faire précéder ceci de quelques réflexions préliminaires ſur les nombres pairs & impairs, au moins ſur leurs principales proprietés, qui ont le plus de rapport avec la progreſſion dont nous parlons.

Je définis le nombre pair, par *celui qui eſt double d'un autre nombre.* Par contre, un nombre impair ſera *celui qui ne pourra être compoſé de deux nombres égaux:* j'excepte pourtant le nombre de *deux*, qui n'a pas pour ſa moitié un nombre, & qui eſt regardé néanmoins comme le prémier des nombres pairs, & l'unité comme le prémier des impairs. Mais comme cette exception eſt unique, on pourra dire en général qu'un nombre pair c'eſt deux ou un de ſes multiples; car un multiple de deux contient *deux* pluſieurs fois, & le quotient eſt un

un nombre, puiſque ce dividende eſt un multiple de deux; ainſi le quotient multipliant le diviſeur, on aura toujours pour dividende le double du quotient, c'eſt-à-dire qu'il ſera pair par la définition. Au contraire un nombre eſt impair lorſqu'il n'eſt égal ni à deux ni à aucun de ſes multiples : il ne pourra pas être diviſé en deux nombres égaux; car ſi cela étoit, deux étant pris un certain nombre de fois, chaque unité de deux le ſeroit le même nombre de fois, ainſi il ſeroit pair contre la définition. Il s'enſuit de là, qu'un nombre impair deviendra pair ſi on lui ajoûte l'unité, & qu'il deviendra impair de pair qu'il auroit été, par cette même addition; car l'unité ajoûtée à un multiple de deux ne fait pas encore deux pris une fois : de même un nombre impair ne peut différer que de l'unité du nombre pair qui le ſuit ou le précéde immédiatement, car s'il différe de deux, c'eſt un nombre pair, & s'il différe d'un nombre plus grand, on prendra *deux* autant de fois qu'il ſe trouve dans ce nombre, & le reſte étant moindre que deux, ce ne peut être que l'unité. La même choſe peut convenir auſſi au retranche-

ment de l'unité, d'un nombre pair ou impair. Je remarque à cette occasion qu'il faut bien prendre garde que par *nombre* je n'entens ici qu'un assemblage d'unités sans aucun reste, & sans y comprendre ce qu'on appelle ordinairement *nombre rompu ou fraction*, au quel cas la définition que je viens de donner seroit entiérement fausse. La nature des nombres pairs & impairs étant ainsi établie, il s'agit d'entrer en matière, & de voir ce qu'ils peuvent par leur addition, soustraction, multiplication & division.

Déja il est évident que tout nombre est nécessairement pair ou impair, parceque tout nombre est ou égal ou multiple de deux, ou ni égal ni multiple de deux: mais ceux de la prémière classe sont les nombres pairs, & ceux de la derniére sont les impairs. Donc &c. cela étant, je cherche quelle est la somme qui resulte des nombres pairs ou impairs ajoûtés les uns aux autres. Je dis d'abord que *deux nombres pairs ajoûtés ensemble font une somme paire*; car puisque la moitié de chacun est un nombre, la moitié de la somme qui est la somme des moitiés de chacune de ces deux parties sera aussi un nombre, & le tout par-

par conséquent pair, suivant la définition. D'ailleurs deux nombres l'un & l'autre multiples de *deux* font un troisième nombre qui doit être encore multiple de deux. *Deux nombres impairs étant ajoûtés on a aussi une somme paire* ; car retranchant l'unité de l'un & de l'autre, ils sont pairs, leur somme est donc alors un nombre pair, & y ajoûtant les deux unités retranchées qui valent deux, elles font par conséquent un nombre pair, la somme totale sera donc un nombre pair par ce qui vient d'être prouvé. Enfin *un nombre pair ajoûté à un impair*, ou *un impair à un pair fait une somme impaire*; parce que la moitié de l'impair sera l'unité ou un nombre avec la moitié de l'unité restante, & la moitié du pair c'est l'unité ou un nombre: ces deux moitiés étant donc ajoûtées ne peuvent donner un nombre entier, parce qu'il restera une moitié d'unité. Car deux nombres étant donnés dont l'un soit multiple de deux, & l'autre ne le soit pas, il est clair que leur somme n'en donnera jamais un nouveau multiple. On a donc ici les règles suivantes. 1°. *Ajoûtant pair avec pair, la somme est paire.* 2°. *Ajoûtant impair avec impair, la somme est paire.* 3°. *A-*

joûtant impair avec pair ou pair avec impair, la somme est impaire.

Un nombre pair de nombres aussi pairs, donne une somme qui est paire; de même un nombre impair de nombres pairs. Car prenant la moitié de chacun de ces nombres pairs, on aura un nombre, & la somme de toutes ces moitiés sera encore un nombre: donc la somme entiére est paire. Il est clair que cela arrive également que le nombre des pairs soit pair ou impair; & il ne l'est pas moins qu'un assemblage de multiples de deux doit faire un multiple de deux. Un nombre pair de nombres impairs donne aussi un nombre pair, parce qu'un nombre dont les unités sont multiples de deux, fait un nombre pair, comme nous venons de le voir; or il reste dans chacun de ces nombres l'unité qui étant prise autant de fois qu'il y a d'unités dans le nombre pair, fait ce nombre pair lui même; auquel ajoûtant la somme paire, le tout doit aussi être pair, par la première règle. Ce qu'il falloit démontrer. Mais par la même raison un nombre impair de nombres impairs donne une somme impaire, parce qu'ôtant l'unité de chacun de ces impairs, il deviendront tous

tous pairs ; & ces unités restantes sont un nombre impair, qui étant ajoûté à la somme paire fera un nombre impair, par la troisième règle. Ayant donc plusieurs nombres qui sont tous pairs, la somme l'est aussi ; mais s'ils sont impairs, alors quand le nombre en est pair, la somme l'est pareillement ; que si le nombre est impair, la somme des impairs est impaire. Voilà pour les cas où les nombres sont tous pairs ou impairs ; mais lorsqu'ils sont les uns pairs & les autres impairs, il n'y a qu'à ajoûter tous les pairs ensemble & les impairs aussi, suivant les règles que nous avons données, & prenant ces deux sommes on verra si le tout doit être pair ou impair ; ou bien il n'y a qu'à les prendre deux à deux, & à continuer ainsi jusqu'à la fin, ce qui est encore le plus aisé. C'est là ce que nous avions à dire en général sur l'addition. Il faut voir maintenant les règles de la multiplication ; elles suivent tout naturellement de ce que nous venons de voir. En effet, puis qu'un nombre pair ou impair de nombres pairs, ou bien encore un nombre pair de nombres impairs donne toujours une somme paire, il est certain que ces nombres

pairs,

pairs ou impairs étants égaux, comme dans un produit qui est un nombre pair ou impair de nombres qui sont de même pairs ou impairs; il sera vrai de dire que les deux facteurs étant pairs, le produit le sera aussi: si le prémier est pair & le second impair, ou le prémier impair, & le second pair, le produit sera encore pair; ou pour m'exprimer d'une manière générale, tout proproduit est pair quand l'un de ses facteurs est pair, & il n'est jamais impair que lors qu'il a ses deux facteurs impairs.

Pour ce qui regarde la soustraction, supposons d'abord afin d'abréger d'autant plus, que les nombres sont toujours inégaux, & que le prémier est plus grand que le second. Cela étant, je dis 1°. que si l'on retranche un nombre pair d'un nombre pair, le reste sera aussi pair; car autrement ajoûté avec le second qui est pair, le prémier seroit impair, ce qui est contre la supposition. D'ailleurs il est évident que si d'un multiple de deux, on ôte un multiple de deux plus petit, le reste ne sera jamais l'unité ni un nombre impair, parce que de deux nombres inégaux ôtant le

le plus petit du plus grand, le reste doit être l'unité ou un nombre ; mais un multiple de deux c'est un nombre dont deux est l'unité, retranchant donc un autre nombre dont deux soit l'unité, moindre pourtant que le prémier, le reste sera deux ou un multiple de deux, c'est-à-dire qu'il sera pair, comme il est aisé de le voir. Je pourrois enfin le démontrer de cette manière, c'est que la moitié du prémier & la moitié du second sont des nombres ; ôtant donc la seconde moitié de la prémière, le reste est l'unité ou un nombre, c'est-à-dire que la moitié du reste étant telle, il faut que ce reste lui-même soit un nombre pair. Cette démonstration suppose pourtant la suivante. Soit $60 - 20 = 40$, $30 - 10 = 20$. c'est à dire que si on retranche la moitié de la seconde grandeur de la moitié de la prémière, on aura pour reste la moitié de la précédente: en effet l'autre moitié du second nombre étant ôtée de l'autre moitié du prémier donne encore le même reste, puisque ce sont des grandeurs égales : or la prémière moitié de la seconde grandeur laisse un reste à la moitié de la prémière ; & l'autre moitié laisse encore le mê-

même reſte à la ſeconde moitié de cette prémière; ces deux moitiés laiſſent donc un reſte double, par conſéquent pair; ce qu'il falloit démontrer. 2°. Si l'on ôte un nombre impair d'un nombre pair, le reſte eſt impair, & cela ne ſe peut autrement, à moins que la ſomme de la ſeconde grandeur ajoûtée au reſte ne fut impaire, contre la ſuppoſition. On voit auſſi que d'un multiple de deux, ôtant deux ou un de ſes multiples moindre que le prémier, il y aura l'unité qui faiſoit l'impair retranchée, & par conſéquent on aura deux ou un de ſes multiples. 3°. Un nombre impair moins un pair donne un reſte qui eſt impair. S'il étoit pair, il ne donneroit pas une ſomme impaire, il ne peut donc être qu'impair. De plus quel que ſoit le multiple de deux que j'ôte du nombre impair, il eſt clair que je n'ôte pas cette unité qui fait le nombre impair, & le reſte par conſéquent aura cette unité là. 4°. *Enfin ôtant d'un nombre impair un autre auſſi impair, le reſte eſt pair*; c'eſt ce qui ſe prouve de la même manière que les autres cas. On a donc les règles ſuivantes. 1°. *Otant pair de pair, le reſte eſt pair.* 2°. *L'impair ôté du pair donne l'im-*

l'impair. 3°. L'impair moins le pair est toujours impair. 4°. L'impair retranché de l'impair donne un reste pair.

Les règles de la division sont celles-ci. 1°. Divisant un nombre pair par un nombre aussi pair, le quotient peut être pair ou impair ; car le quotient multipliant le diviseur est égal au dividende ; mais nous avons vû qu'à moins que les deux facteurs ne fussent impairs, le produit seroit toujours pair : ainsi que le quotient soit pair ou impair, les facteurs ne seront pas tous deux impairs, puisqu'il y en a un qui est pair par la supposition. C'est ce qui paroit encore, & qui suit de la nature même de la division où l'on cherche combien de fois une grandeur est égale à une autre. Cette prémière peut contenir un nombre pair ou impair de diviseurs, pourvû qu'elle soit elle-même paire, à cause que quelque que puisse être le nombre des diviseurs, la somme de chacune des moitiés jointes ensemble fait la moitié du dividende, & ne peut être qu'un nombre ; ce qui étant, le dividende sera pair dans l'un & l'autre cas. 2°. Divisant un nombre pair par un impair, le quotient est néceſſairement pair, car autrement les deux

deux facteurs, c'eſt-à dire, le quotient & le diviſeur étant tous deux impairs donneroient auſſi un produit impair: ainſi ce produit ne ſauroit être égal au dividende qui eſt ſuppoſé pair. Mais pour mieux comprendre ceci, remarquons qu'un nombre pair de nombres impairs eſt toujours pair ſuivant les règles que nous avons établies dans l'addition, parce que les unités reſtantes de chacun des impairs, font un nombre pair, lequel ajoûté à la ſomme des impairs tous devenus pairs par ce retranchement de l'unité, ces deux nombres pairs font une ſomme paire. Au contraire le quotient ne pourroit être impair ſans que l'on eût un nombre impair de diviſeurs impairs, & la ſomme de ces diviſeurs ne feroit pas le dividende, puiſqu'on le ſuppoſe pair: donc le quotient ſera pair, ce qu'il falloit démontrer. 3°. *Diviſant un nombre impair par un pair, le quotient ne peut être ni pair ni impair*; car s'il eſt pair, le dividende doit être pair; & s'il eſt impair, le quotient impair multipliant le diviſeur pair, donnera un produit pair & non pas le dividende impair. Et la raiſon en eſt, qu'un multiple de deux ne pouvant jamais être égal à un nombre

bre impair, le quotient étant un impair prendra plusieurs fois un multiple de deux, laquelle somme sera encore de nouveau multiple de deux, & par conséquent un nombre pair; il s'en manquera donc, ou il y aura toujours l'unité de moins ou de plus après la division faite, jointe peut-être à un autre nombre que ne soit exact le diviseur; ainsi ce ne sera jamais une division exacte. 4°. Enfin *divisant un nombre impair par un nombre impair, le quotient est impair.* S'il étoit pair, le produit le seroit lui-même contre la supposition, car un nombre impair de nombres impairs fait, comme nous l'avons vû, un nombre impair, & comme on l'a aussi démontré, un nombre pair de nombres impairs donne une somme qui est paire. Ainsi les règles de la division se reduisent à celles-ci. 1°. *Pair divisé par pair donne pour quotient pair ou impair.* 2°. *Divisant un nombre pair par un impair, le quotient est pair.* 3°. *Un nombre impair divisé par un pair, ne donne pour quotient ni pair ni impair, c'est-à-dire ne donne pas un quotient exact.* 4°. *Enfin l'impair divisé par l'impair donne pour quotient un impair.*

Tou-

Toutes ces vérités se peuvent aussi démontrer en regardant la division comme une soustraction réitérée d'une même grandeur. Et quand à la prémière règle, puis qu'ôtant un nombre pair d'un autre qui est pair, le reste est encore pair ; & ôtant une seconde fois ce même nombre du reste, le reste suivant sera pair par la même raison, jusqu'à ce que le reste devenant égal au nombre qu'on a retranché plusieurs fois, la soustraction est finie. Or le nombre des retranchements indiqué par le quotient peut être pair ou impair, parce que tout multiple d'une grandeur peut contenir cette grandeur autant de fois que l'on voudra. C'est ce dont il sera aisé de faire l'application aux autres cas.

Les règles des nombres pairs & impairs étant ainsi établies, nous allons examiner en peu de mots ce qu'est la progression des nombres impairs. D'abord il sera aisé de montrer que son prémier terme doit être *l'unité*, & la différence *deux*. Et pour le sentir, il est à propos de remarquer que deux est le prémier des nombres pairs & que l'unité est ici regardée comme le prémier des im-

impairs. Si donc j'ajoûte deux à l'unité, j'ai trois qui est un nombre impair, parce que l'unité entant qu'impaire ajoûtée à un nombre pair fait un nombre impair. Ainsi pour avoir le nombre pair qui approche le plus de trois, il faut lui ajoûter l'unité & la prendre encore une fois pour avoir le nombre impair qui doit suivre: car deux est le plus petit des pairs & l'unité est impaire; or si on prenoit un plus grand terme que deux, on omettroit nécessairement quelque nombre impair. C'est de cette manière que l'on aura la suite naturelle de tous les nombres impairs.

Les nombres impairs sont fait par l'addition des nombres naturels; car dans l'une & l'autre de ces progressions, l'unité est le prémier terme, & la différence de la seconde est double de celle de la prémière. D'où il s'ensuit que *chaque terme de la progression des impairs à la reserve du prémier est égal au terme qui lui répond dans la progression naturelle plus le précédent.* C'est ce que l'on va faire voir. Pour cela il faut faire attention que le même terme proposé dans les deux progressions, c'est le prémier

plus

plus le produit de la différence par le nombre des termes qui le précédent. Or le prémier terme eſt le même dans l'une & dans l'autre de ces progreſſions, auſſi bien que le nombre des termes qui précédent celui qui eſt donné. Mais la différence de la ſeconde eſt double de celle de la prémière, le ſecond produit eſt double du prémier, comme il eſt évident, & puiſque l'unité ſe trouve ajoûtée de part & d'autre à chaque produit, il s'en manque l'unité que le terme de la progreſſion ne ſe trouve être le double de celui qui a le même rang dans la progreſſion des nombres naturels. Donc le terme de la progreſſion impaire eſt égal à celui qui lui répond dans la progreſſion naturelle plus le précédent, ce qu'il falloit prouver.

Dans la progreſſion des nombres impairs, le quarré du nombre des termes eſt égal à la ſomme de la progreſſion. Dans toute progreſſion la moitié de la ſomme des extrêmes multipliée par le nombre des termes donne pour produit la ſomme de la progreſſion. Or ici le dernier terme, c'eſt le prémier plus le produit de la différence, qui eſt deux, par le nombre des termes moins un : c'eſt donc le pré-

prémier terme plus le double du nombre des termes moins la différences *deux*, ajoûtant à ce dernier terme le prémier, on aura le double du prémier terme & le double du nombre de termes moins une fois la différence : la somme des extrêmes vaut par conséquent le double du nombre des termes, & sa moitié multipliée par le nombre des termes, c'est le nombre des termes multiplié par lui-même, c'est-à-dire le quarré du nombre des termes, égal à la somme de toute la progression.

Il suit delà que *si l'on ajoûte les deux prémiers termes de la progression des nombres impairs, on aura le second quarré; que la somme des trois prémiers donne le troisiéme quarré & ainsi de suite*, parce que la somme de ces termes sera celle de la progression : or le prémier terme, c'est l'unité, & il est pour ainsi dire à lui-même sa somme, aussi donne-t-il le prémier quarré. Le quarré de deux, c'est la somme des deux prémiers termes $1+3$. Celui de trois est la somme des trois prémiers termes, comme on le voit clairement par la progression même dont il s'agit.

Mon

Mon dessein n'est pas de m'arrêter d'avantage sur cette matière, moins encore de parler de l'Arithmétique des infinis; parce que je crois ces prétendues démonstrations un peu trop hazardées. D'ailleurs le sujet mérite bien un traité à part. Voilà donc tout ce que j'avois principalement à dire sur les raisons, proportions & progressions Arithmétiques. Elles sont curieuses, comme vous voiés, & rien n'est plus facile que d'en découvrir les proprietés, quand on s'en forme des idées justes & exactes, & qu'on se les est rendues familiéres par un long exercice. Nous allons commencer présentement à parler des raisons, proportions & progressions Géométriques qui donnent lieu à des propositions très curieuses, & de plus d'un usage entiérement indispensable dans tout le cours des Mathématiques.

ENTRETIEN XII.

NEANDER.

NOus voici donc parvenus, dites vous, aux raisons Géométriques.

MA-

MATHESIUS. Oui, & vous poûvés être persuadé que c'est ici l'essentiel des Elements d'Algèbre, & la partie la plus considérable de toutes les Mathématiques. Aussi l'on doit bien prendre soin de traiter ce sujet d'une maniére également claire, nette & précise. C'est à quoi je vais donner toute mon application.

NEANDER. J'y apporterai de mon côté toute l'attention dont je suis capable, car j'ai une grande envie de connoitre à fond ce sujet.

MATHESIUS. Entrons donc en matière sans autre préambule. Nous avons vû ce qu'il faut entendre par raison Arithmétique, que c'étoit *ce rapport qui se trouve entre deux grandeurs, que l'on compare pour s'assurer si l'idée que l'on a de l'une est la même que celle qu'on a de l'autre, ou si elles sont différentes, c'est-à dire, pour les considérer suivant leur égalité ou inégalité, en faisant attention uniquement à ce qu'il faut ajoûter ou diminuer de la seconde, pour la rendre égale à la première.* Mais on peut comparer d'une autre façon ces deux mêmes grandeurs, c'est en voiant si l'on n'en trouvera point une troisième qui soit aliquote commune

de ces deux prémières. Et quoique la comparaison des grandeurs puisse se faire d'une maniére vague & générale, il faut cependant les concevoir un peu déterminément, & se former au moins quelques idées de leurs parties, sans quoi, de telles comparaisons ne fourniroient rien de remarquable. Il faut donc pour cela les regarder au moins comme deux nombres de même espèce, tels que l'on puisse trouver dans l'un quelque partie aliquote qui, prise un certain nombre de fois, égale aussi l'autre & le mesure exactement. Or quand on suppose deux grandeurs telles qu'on en peut trouver une troisième qui soit leur commune mesure, leur rapport se nomme *raison Géometrique*, dont les termes sont *l'antécédent* & *le conséquent*. Et ce sont aussi les raisons Géométriques que quelques-uns appellent *raisons de nombre à nombre*. A cet égard il me sufit de remarquer que je prends ce terme de *raison Géometrique* dans un sens un peu différent de celui que quelques Mathématiciens y attachent. Ce qu'il est bon d'observer pour ne pas s'embarrasser ici dans des difficultés & des équivoques qu'il est aisé de prévenir. Je ne m'arrêterai pas non plus à re-

rechercher pourquoi on a appellé ces raiſons *Géométriques* ; car outre qu'il eſt aſſés aiſé de le voir, c'eſt que de plus on ne peut retirer aucune utilité de cette découverte.

Par cette définition que je viens de donner des raiſons Géométriques, il eſt clair que le conſéquent ou une de ſes parties aliquotes étant pris une ou plusieurs fois égalera ſon antécédent, puiſque tous ces cas peuvent avoir lieu, & que ſi aucun ne pouvoit être admis, la définition dont nous parlons ne ſauroit viſiblement convenir à deux grandeurs de cette nature : & ceci achéve d'éclaircir cette prémière notion que nous avons donnée de *raiſons* ; car quand les deux grandeurs ſeront égales, le conſéquent pris une fois égalera l'antécédent, c'eſt ce qui fait *la raiſon d'égalité* : or dans ce cas, toute partie aliquote du conſéquent doit être priſe autant de fois pour avoir le prémier terme, que pour faire le tout dont elle eſt partie. Cela ſuit tout naturellement d'un des axiomes que nous avons déja établi. Quand l'une des grandeurs eſt pluſieurs fois égale à l'autre, ſavoir l'antécédent à ſon conſéquent, la raiſon eſt *multiple* & le conſéquent, par la définition même

N 2 de

de multiple, pris un certain nombre de fois égale son antécédent, & la partie aliquote commune l'étant elle-même dans le conséquent, cela fait que le nombre de fois qu'il faut prendre cette aliquote pour avoir l'antécédent, sera un produit dont les facteurs doivent être, le nombre de ces aliquotes qui composent le conséquent, & le nombre de fois qu'il faut prendre le conséquent pour faire l'antécédent. Si c'est l'antécédent qui soit partie aliquote de son conséquent, la raison est alors *sousmultiple*, & le nombre des parties aliquotes dont l'antécédent est composé, doit être pris autant de fois qu'il y a d'antécédents dans la valeur du conséquent. Enfin les deux termes n'étants ni égaux ni multiples l'un de l'autre, il faut alors nécessairement qu'une commune mesure soit prise un certain nombre de fois pour faire l'antécédent & le conséquent, & ces deux nombres doivent être inégaux ; comme on voit aisément. C'est aussi à cause de cela que je nommerai cette espèce de raison *raisons numeriques*, pour la distinguer des autres qui peuvent s'exprimer, comme nous allons le voir, par l'unité & un nombre. Car les raisons d'égali-

té,

té, par exemple, ne conſiſtent qu'en ce que le conſéquent pris une fois égale l'antécédent. De-là vient qu'on les exprime ainſi $\frac{1}{1}$ ou par deux nombres égaux $\frac{a}{a}$ dont les quotients ſont l'unité. En effet, il n'eſt pas néceſſaire de déterminer les parties du conſéquent ni celles de l'antécédent, puiſque ce dernier c'eſt le conſéquent lui-même pris une fois. Les raiſons multiples & ſousmultiples peuvent s'exprimer par un nombre & l'unité, ou l'unité & un nombre $\frac{a}{1}$ & $\frac{1}{a}$ car le ſecond terme pris pluſieurs fois égale le prémier dans les raiſons multiples, & alors il n'eſt pas néceſſaire de déterminer les unités du conſéquent, il ſuffira de voir combien de fois on le prend, & de regarder l'antécédent comme un nombre dont les unités ſont le conſéquent. Pour les raiſons ſousmultiples, c'eſt tout le contraire, il faut déterminer le conſéquent & l'exprimer par un nombre, mais parce que l'unité du conſéquent ne doit être priſe qu'une fois, on n'exprime pas l'antécédent par un nombre, on ſe ſert ſimplement de l'unité. On pourroit néan-

moins les exprimer par deux nombres comme $\frac{ac}{a}$ ou $\frac{a}{ac}$ c'eſt-à-dire, par exemple, $\frac{12}{4}$ ou $\frac{11}{22}$. Enfin les raiſons *numériques* doivent, comme je l'ai déja dit, s'exprimer par deux nombres, parce que le conſéquent n'eſt ni égal ni multiple ni aliquote de ſon antécédent ; on doit déterminer ſa valeur & prendre une de ſes parties aliquotes afin de voir combien il en faut pour avoir l'antécédent. On devra donc exprimer le conſéquent par un nombre qui marque combien de parties aliquotes on y conçoit, & l'antécédent auſſi par un nombre, puiſqu'il faudra prendre cette unité pluſieurs fois. Il faut donc ſe ſervir de deux nombres comme $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{5}$ & dans cette ſorte de raiſons, l'antécédent peut valoir plus ou moins que ſon conſéquent. Toute raiſon Géométrique eſt donc *raiſon d'égalité*, ou *multiple*, ou *ſousmultiple*, ou *numerique*; & il eſt certain qu'on n'en peut trouver aucune qui ne ſe rapporte à l'une de ces quatre eſpèces générales. On les diſtingue encore d'une autre manière, ſavoir en *raiſons d'égalité*, *de plus grande* ou

ou *de moindre égalité*, ſuivant que leurs antécédents ſont égaux plus grands ou plus petits que les conſéquents.

On appelle *expoſant*, ou *nombres expoſants d'une raiſon*, tout ce qui ſert à exprimer conſtamment de quelle maniére & combien de fois il faut prendre le conſéquent ou une de ſes parties aliquotes, pour le rendre égal à l'antécédent. Suivant cela, l'expoſant d'une raiſon d'égalité c'eſt $\frac{1}{1} = 1$, ou ſimplement l'unité: car quand même je prendrois $\frac{9}{9}$, cela n'empêche pas que l'expoſant ne ſoit 1, puiſque prenant une grandeur une fois, je prens auſſi une fois toutes les parties qu'elle contient; de quelle maniére donc que l'on détermine les conſéquents, on aura toujours l'aſſemblage de toutes ces unités pris une fois. L'expoſant d'une raiſon multiple, c'eſt un nombre & l'unité, ou ſimplement un nombre, car $\frac{a}{1} = a$. Celui de la raiſon ſousmultiple, c'eſt l'unité avec un nombre $\frac{1}{a}$, & celui d'une raiſon numérique c'eſt deux nombres $\frac{a}{b}$. On peut voir par là que les

expoſants d'une raiſon en doivent être eux-mêmes une, dont le conſéquent exprime le nombre des plus grandes aliquotes du conſéquent, & que l'antécédent en contienne le moins qu'il eſt poſſible. Ainſi les deux plus petits termes dans leſquels on pourra exprimer la valeur d'une raiſon, ſont les expoſants de cette raiſon là.

La valeur d'une raiſon ſe connoit par le nombre de fois que l'on prend une partie aliquote du conſéquent. Plus de fois on la prend, plus la raiſon vaut; & reciproquement. Ainſi deux raiſons ſont toujours égales, lorſque les antécédents ſont la même partie, chacun de ſon conſéquent, priſe le même nombre de fois. Remarquons que ceci a lieu, lorſque les conſéquents ſont inégaux tout comme quand ils ne le ſont pas. Suppoſant donc deux grandeurs; ſi je les prens toutes deux le même nombre de fois, ou toutes deux une fois, ou enfin ſi je les diviſe l'une & l'autre, chacune en autant de parties égales, & que de chacune j'en prenne une ou pluſieurs, ſavoir le même nombre, les grandeurs feront les conſéquents de deux raiſons égales, dont les priſes feront les antécédents.

dents. Ne confondés pas ici égalité de raiſons avec raiſons d'égalité, la différence eſt bien grande; raiſon d'égalité, c'eſt celle de $\frac{a}{a}$ ou de $\frac{1}{1}$, mais l'égalité de raiſons a lieu lors que deux raiſons ſe reſſemblent par rapport à la quantité.

Les raiſons ſont donc des grandeurs, puiſqu'elles ſont ainſi ſuſceptibles de plus ou de moins, qu'elles peuvent être égales ou inégales entr'elles & par conſéquent ajoûtées, retranchées, multipliées & diviſées les unes par les autres, comme nous le ferons voir dans la ſuite. Les nombres eux-mêmes ne ſont autre choſe que des raiſons multiples, dont l'unité eſt le conſéquent & le nombre l'antécédent. Or l'unité eſt ici la plus grande commune meſure des termes de ces ſortes de raiſons; & voilà pourquoi l'expoſant de ces ſortes de raiſons, ſavoir des multiples, eſt un nombre; en effet tout nombre ſuppoſe évidemment une comparaiſon d'une grandeur à ſes parties, leſquelles étant regardées comme égales, l'une d'entr'elles eſt priſe pour la partie aliquote, & pour le conſéquent. C'eſt ce qu'on obſerve viſiblement dans tous les nombres. Les raiſons numériques

ne font que deux nombres de la même espèce, dont l'unité eft la commune mesure. On fuppofe ordinairement lorfque plufieurs raifons font données d'une maniére générale, que la valeur de chaque unité eft égale à quelque autre que ce puiffe être; à moins que l'on ne détermine, en nommant ces raifons qu'elles font de divers genres, autrement on les reduit à une efpèce d'homogénéïté; car rien n'eft plus aifé que de faire abftraction de la valeur des unités de divers nombres, & de s'àbftenir de les comparer les unes avec les autres.

Cela étant, je reviens à l'égalité des raifons, & pour en donner une définition exacte, difons que deux raifons font égales, quand leurs conféquents ou la même partie aliquote de l'un & de l'autre font pris une fois ou le même nombre des fois. Cette égalité de raifons fe nomme *proportion*, & les quatre grandeurs font dites *proportionnelles*, favoir le prémier antécédent, le prémier conféquent, le fecond antécédent & le fecond conféquent. Le prémier terme avec le quatrième font appellés *les extrêmes*: & le fecond avec le troifième, font les *moiens* de cette proportion.

Si

Si les grandeurs ſont telles que la prémière ſoit à la ſeconde ce que la ſeconde eſt à la troiſième, & qu'ainſi la ſeconde tienne lieu de prémier conſéquent & de ſecond antécédent, c'eſt-à-dire des deux moiens ; la proportion s'appelle *continue* & la ſeconde grandeur *le terme moien* ou *moien proportionnel Géométrique*.

Toute raiſon eſt égale à elle-même, car elle ne prend ſon conſéquent ou une de ſes parties aliquotes ni plus ni moins de fois qu'elle ne le fait, par le prémier axiome.

On peut faire une proportion Géométrique avec une ſeule grandeur, car il eſt clair qu'il y a autant de ſortes de proportions par rapport aux raiſons, qu'il y a d'eſpèces de raiſons. Ainſi deux raiſons d'égalité peuvent être égales, & une ſeule étant égale à elle-même, & ne contenant qu'une ſeule grandeur, elle pourra ſervir pour les quatre termes, comme ici 1. 1:: 1. 1. ou 3. 3:: 3. 3.

Toutes les raiſons d'égalités ſont égales, car dans chacune le conſéquent eſt pris une fois ; il y a donc égalité de raiſons dans toutes, par la définition. Ainſi avec deux grandeurs on peut faire une proportion en prenant deux raiſons d'é-

galité, comme 4. 4:: 5. 5. Pour une proportion continue il ne faut que trois grandeurs, parce que la seconde tient lieu de deux termes, comme *a. b:: b. c.* Enfin une proportion peut avoir pour ses quatre termes, quatre grandeurs différentes *a. b:: c. d.* ou bien 12. 2:: 42. 7. ou 8. 16:: 1. 2. &c.

Deux raisons égales à une troisième sont égales entr'elles. Car l'antécedent de la prémière raison, c'est une partie aliquote du conséquent prise autant de fois que la même partie aliquote du troisième conséquent pour faire le troisième antécédent, c'est la même partie aliquote du second conséquent prise encore le même nombre de fois: donc les deux prémiers conséquents sont pris, ou une de leurs parties aliquotes, le même nombre de fois pour faire leur antécédent. Ces raisons sont donc égales, par la définition.

NEANDER. Sans vous interrompre, je vois à présent d'une maniére distincte ce qu'il faut entendre par ces façons de parler ordinaires, *à proportion, prendre de quelque chose à proportion de sa grosseur, estimer les choses à proportion de leur valeur* & autres expressions de cette nature.

MA-

MATHESIUS. Sans doute: quand on dit par exemple que deux perſonnes ſont autant de dépenſe l'une que l'autre, chacune à proportion de ſon bien: cela veut dire, à parler exactement, que ſi le prémier dépenſe le quart ou la ſixième partie &c. de ſon bien, l'autre dépenſe auſſi du ſien le quart ou la ſixième partie. Il n'eſt donc pas néceſſaire, comme vous le voiés, que les antécédents ſoient égaux pour faire une proportion; il ne le ſont même que lorſque leurs conſéquents le ſont auſſi entr'eux, parce que plus le conſéquent eſt grand, & plus la même partie aliquote devient grande, & elle diminue auſſi quand le tout devient plus petit. Ce qui eſt bien évident, puiſque quand le tout augmente ou diminue, la meſure précédente qui contenoit exactement ſon tout un certain nombre de fois, ne le fera plus le même nombre de fois quand on aura changé la valeur de ce tout. Ainſi dans le cas où il diminue, il faut que la ſomme des retranchements qui ſe font en prenant pluſieurs fois la partie aliquote qui a été diminuée ſoit égale à ce qu'on aura retranché du tout; comme par exemple ayant cette raiſon multiple 60: 10, dont le quotient

tient ou expoſant eſt 6; je veux diminuer l'antécédent de 12 qui eſt la cinquième partie de 60; il faut donc prendre pour même partie aliquote un nombre moindre que dix, & pour le trouver je dis que l'on doit ôter de 10 un nombre tel que la ſomme des retranchements ſoit égale à 12, partie retranchée, & ce nombre eſt 8; alors, comme il eſt évident, la raiſon demeure la même, quoique les termes ayent changé de valeur. Que ſi à préſent j'augmentois 60 de 20, il me faudroit diviſer 20 par 6 qui donne pour quotient 3 & un tiers; on ajoûtera donc trois & un tiers à dix, & l'on auroit $10 \times 6 = 60$, & $3 + 1$ tiers pris ſix fois, ce qui fait 20 unités: or $60 + 20 = 80$. Je conclus de là que l'antécédent augmentant, la raiſon augmente; qu'elle diminue, au contraire, quand il devient plus petit. Mais il n'en eſt pas de même du conſéquent, car ſi on augmente ce ſecond terme, la partie aliquote devient plus grande, & ne ſe trouve pas priſe autant de fois qu'auparavant dans la valeur du prémier; c'eſt ce qui fait que la raiſon diminue. Par contre elle augmente, à meſure que le conſéquent diminue,
par

parce que la partie aliquote devient plus petite, & se trouve ainsi plus de fois qu'auparavant dans l'antécédent. On voit par là que pour conserver la valeur d'une raison dont on veut changer les termes, il faut augmenter ou diminuer les deux termes qui la composent; car quand on augmente l'antécédent, si on diminuoit ou laissoit seulement le conséquent tel qu'il étoit auparavant, la raison seroit plus grande. Si on augmentoit le conséquent, en diminuant ou seulement ne changeant rien à l'antécédent, la raison deviendroit plus petite. Il faut donc ajoûter ou diminuer quelque chose de l'antécédent & du conséquent, non pas les mêmes grandeurs, ce qui ne pourroit conserver la même raison que dans celles d'égalité; mais il faut que les deux ajoûtées ou retranchées soient en même raison, comme nous le verrons bien-tôt; car pour avoir les mêmes raisons, il faut que la partie aliquote augmentant, l'antécédent augmente aussi d'une valeur égale au produit de l'exposant de la raison par ce qui a été augmenté de l'antécédent. Par exemple j'ai 5: 3. Je veux augmenter le conséquent de l'unité, alors il vaudra 4 qui contient 3 & le tiers de trois:

trois: il faut de même que j'augmente l'antécédent du tiers du conſéquent multiplié par l'expoſant de 5: 3, qui ne peut être exprimé par un ſeul nombre. Voilà pourquoi on a recours aux fractions, dont il faut néceſſairement ſe ſervir ici, comme dans pluſieurs autres cas.

A cette occaſion, je dois remarquer que les raiſons de plus grande inégalité s'appellent plus ordinairement *diviſions* & celle de moindre inégalité *fractions*. Les raiſons *multiples* ſont les diviſions exactes, & les raiſons *numeriques* ſont les *inexactes* ou les fractions qui ne ſont pas aliquotes du tout dont elles ſont parties. Ainſi les nombres, les unités, les multiples, les aliquotes, les dividendes, les diviſeurs, les quotients, les multipliés, les multipliants, les produits, les numerateurs, les dénominateurs: tout cela ne ſont que de noms qui expriment les diverſes maniéres de conſidérer les raiſons Géométriques. Par conſéquent, puiſque ces choſes s'expliquent par les mêmes principes, nous n'en ferons pas pluſieurs Traités à part.

Il eſt important d'avoir des idées bien exactes de ce que ſont les raiſons & les progreſſions Géométriques. C'eſt pourquoi

quoi je reviens souvent à expliquer leur nature, & je tâche de vous présenter ce sujet sous les diverses faces par où on peut le considérer. J'ai dit, il n'y a qu'un moment, que si l'on ajoûtoit aux deux termes d'une raison la même grandeur, ou que si on la retranchoit, la raison ne seroit plus la même, il en faut excepter les raisons d'égalité ; & quoique nous ayons fait voir cela au moins en partie, quand nous avons parlé de la division, je vais le prouver maintenant d'une maniére générale, en parcourant toutes les espèces de raisons Géométriques. Pour les raisons d'égalité il faut d'abord remarquer que c'est une exception que l'on doit faire, & en démontrant que cela ne peut convenir aux trois autres sortes de raisons, nous aurons fait voir que c'est là l'unique exception que l'on puisse faire sur ce sujet. Supposant donc 1°. $a:a$. je dis que $a:a = a - b : a - b$. ou $a:a = a + b : a + b$. Cela est évident par cet axiome, que des grandeurs égales ajoûtées ou retranchées d'autres grandeurs aussi égales donnent des sommes ou des restes égaux. D'ailleurs toutes les raisons d'égalité sont le conséquent pris une fois, ainsi quand on ajoûte

ajoûte une grandeur au conſéquent, il faut augmenter l'antécedent de la même quantité. 2°. Dans les raiſons multiples *ab: b*, ajoûtant à *b* une grandeur quelconque, ſi je ne fais qu'augmenter l'antécedent de la même quantité, pour une fois que l'antécedent eſt augmenté, le conſéquent qui ſe prend pluſieurs fois ſe trouvera faire une ſomme beaucoup plus grande que ſon nouvel antécédent, quand il ſera pris autant de fois qu'auparavant. 3°. Dans les raiſons ſousmultiples, le même raiſonnement a lieu: augmentés le conſéquent & l'antécédent d'une même grandeur, le conſéquent ne reçoit qu'une ſeule addition, au lieu que l'antécedent en reçoit pluſieurs; on ne pourra donc pas dire que l'antécedent puiſſe être pris le même nombre de fois pour égaler ſon conſéquent. Enfin 4°. dans les raiſons numeriques où une même aliquote a deux multiples dans chaque terme de la raiſon, comme les deux termes ſont néceſſairement inégaux, il faut qu'après cette augmentation, il y ait une partie aliquote, ſavoir un nombre ou l'unité de celles qui exprimoient déja les deux nombres, termes de la raiſon, qui ſoit même aliquote des deux nouveaux ter-

termes. Or en ſuppoſant qu'on augmente les deux termes d'une même grandeur, cela ne ſe peut; comme on va le prouver. Quand on augmente le conſéquent d'une raiſon numérique, il faut que chaque aliquote dont il eſt compoſé, ſoit augmenté du quotient de la grandeur ajoûtée par le nombre des aliquotes que l'on ſuppoſe dans ce conſéquent; car 1°. il eſt certain que chaque partie aliquote eſt augmentée; 2°. qu'elle l'eſt d'une même quantité; 3°. que la ſomme de ces nouvelles aliquotes fait la nouvelle grandeur; d'où il s'enſuit que la ſomme des prémières aliquotes plus la ſomme des augmentations ſont égales à la valeur du prémier conſéquent, & à celle de la grandeur ajoûtée, qui priſes enſemble font le conſéquent que l'on a augmenté. Après cela j'ajoûte à l'antécedent la même grandeur par la ſuppoſition, mais il contient plus ou moins de mêmes aliquotes que ſon conſéquent: donc la grandeur qu'on ajoûte étant diviſée par un nombre de parties aliquotes qui n'eſt plus le même qu'auparavant, le quotient ſera auſſi différent; ou ce qui revient au même, la quantité ajoûtée fournira toujours le nombre d'aliquotes qu'elle avoit donné dans

dans le conféquent : ainfi l'antécédent contiendra plus ou moins de mêmes aliquotes que fon conféquent, fi on leur ajoûte à chacun une certaine grandeur : la même chofe a lieu par rapport à la fouftraction, comme on peut s'en convaincre aifément.

J'avois prefque oublié cette propofition que *deux grandeurs qui font en même raifon avec une troifième, font égales entr'elles*. Mais vous n'y auriés pas beaucoup perdu, puifqu'au fond elle revient à celle-ci, que *les antécedents fant égaux lorfque les conféquents le font, & réciproquement*. Cependant nous ne laifferons pas de l'examiner de nouveau, d'autant plus qu'elle nous arrêtera très peu. Il faut donc prouver que fi la raifon de la prémière grandeur à la troifième eft égale à celle de la feconde à cette même troifième, la prémière grandeur fera égale à la feconde; 1°. dans les raifons d'égalité, deux grandeurs égales à une troifième, font égales entr'elles. Donc, &c. 2°. dans les raifons multiples, les conféquents étant les mêmes, puifque c'eft la même grandeur, pour que les raifons qu'ils ont avec leurs antécedents foient égales, il doivent être pris chacun le même

me nombre de fois : ainſi les antécedents ſeront égaux entr'eux. Dans les raiſons ſousmultiples, les conſéquents ſont égaux, ils ſont diviſés l'un & l'autre en un même nombre de parties égales, dont l'une l'eſt à toutes les autres : les antécedents ſont donc égaux, & la prémière grandeur égale à la ſeconde. 4°. Enfin dans les raiſons numériques, on prend dans les deux antécedents le même nombre de mêmes aliquotes des deux conſéquents égaux. Donc les antécedents ſont égaux. Ce qu'il falloit démontrer.

Voici maintenant une propoſition fondamentale ſur la nature des raiſons & proportions Géométriques, qui ſervira à démontrer avec une grande facilité pluſieurs théorêmes que l'on a ſur ce ſujet. C'eſt *qu'un multinome étant donné, toute partie aliquote de ce multinome, eſt égale à la ſomme des mêmes aliquotes de tous les termes dont il eſt compoſé;* & que par contre, ſi dans une grandeur, on prend la même aliquote de chacune des parties que l'on y concoit & qu'on les ajoûte enſemble, cette ſomme ſera auſſi même aliquote du tout. C'eſt ce qu'il n'eſt pas difficile de faire voir : car puiſque chaque terme du multinome eſt diviſé en un même

même nombre de parties égales, & que chacun fournit une de ces parties, on aura d'abord la ſomme des mêmes aliquotes : mais il n'y a aucun de ces termes qui ne fourniſſe ſa partie aliquote le même nombre de fois : donc la ſomme des mêmes aliquotes ſe trouvera dans le multinome autant de fois qu'une ſeule de ces aliquotes eſt contenue dans le terme dont elle fait partie. Soit le multinome $a + b + c + d = m$, & les mêmes aliquotes u, x, y, z. Je dis que comme $a : u. b : a. c : y. d : z.$ de même $a + b + c + d = m$ eſt à $u + x + y + z$. On voit bien que cette Propoſition eſt reciproque, & que ſi l'on a, par exemple, un binome dont on prenne une partie aliquote; qu'on en retranche la même aliquote, du prémier terme, le reſte ſera encore la même aliquote du ſecond. Ainſi ayant 12 dont je veux prendre le tiers qui eſt 4 & que faſſe $12 = 7 + 5$, de 3 ôtant le tiers de 7, il reſte le tiers de 5, car le tiers de 7, c'eſt 2 & un tiers, & celui de 5, c'eſt 1 & 2 tiers. Or de quatre retranchant deux & un tiers, il reſte un & deux tiers, comme on le voit; & ce reſte, c'eſt le tiers de cinq ſecond terme du binome propoſé.

Plusieurs raisons étant égales, la somme des antécedents est à la somme des conséquents, comme un seul antécedent est à son conséquent. 1°. (*a*: *a*) la somme des antécedents est égale à celle des conséquents, comme un seul antécedent est égal à son conséquent. 2°. (*ab*: *a*) chaque antécedent c'est son conséquent pris un certain nombre de fois qui sera le même dans tous, puisqu'on suppose les raisons égales: or la somme des antécedents c'est un multinome dont tous les termes sont divisés en un même nombre de parties aliquotes, savoir les conséquents: donc la somme des antécedents aura dans celle des conséquents la somme des mêmes aliquotes chacune de son tout; elle sera donc à cette somme des conséquents, comme un seul antécedent est à son conséquent. 3°. (*a*: *ab*) dans ce troisième cas, le même raisonnement a lieu: la somme des antécedents sera la somme des mêmes aliquotes & celles des conséquents sera le multinome: ainsi puisque ce n'est pas entant qu'antécedents ni entant que conséquents, que cette proprieté a lieu, elle subsiste aussi bien dans les raisons sousmultiples que dans les multiples. 4°. (*a*: *b*). L'antécedent est

ici une partie aliquote de ſon tout, qui ſe trouve toujours même aliquote, & priſe autant de fois dans l'un que dans tous les autres. Mais la ſomme des antécedents, c'eſt la ſomme des mêmes aliquotes de tous ces conſéquents priſe autant de fois qu'un ſeul antécedent contient la partie aliquote de ſon conſéquent: la ſomme des antécedents contiendra donc la ſomme des aliquotes de tous les conſéquents autant de fois qu'un ſeul antécedent contient la partie aliquote de ſon conſéquent. Par exemple, j'ai ces raiſons ci $5:7 = 10:14 = 30:42$. Toutes ces raiſons ſont égales, chaque conſéquent eſt diviſé en 7 parties dont on en prend 5 dans l'antécedent, la ſomme des antécedents c'eſt la ſomme des ſeptièmes de tous les conſéquents, c'eſt la ſeptième partie de la ſomme des conſéquents, priſe autant de fois qu'il le faut pour faire un antécedent qui ait une même raiſon avec l'une de celles que je viens de propoſer. Donc &c.

De cette dernière propoſition ſe déduit manifeſtement le théorème qui ſuit. C'eſt que *deux grandeurs multipliées par une troiſième, ſont en même raiſon qu'avant d'être multipliées*, c'eſt-à-dire qu'une

rai-

raiſon ne changera jamais tant que l'on multipliera ſes termes par un même nombre : car comme dans cette multiplication, le ſecond facteur eſt le même, il y a autant d'antécedents que de conſéquents, puiſque ce ſont les deux multipliés : on a pluſieurs raiſons égales : donc la ſomme des antécedents eſt à celle des conſéquents comme un ſeul antécedent eſt à ſon conſéquent. La raiſon ne changera pas non plus, ſi on diviſe les deux termes par une même grandeur ; car les deux Quotients multipliants le diviſeur, le feront par une même grandeur, & la raiſon doit être la même qu'auparavant.

Deux Grandeurs demeurent en même raiſon quoique l'on ajoûte ou que l'on retranche de l'une & de l'autre, pourvû que ce que l'on ajoûte ou que l'on retranche de la prémière, ſoit à ce que l'on ajoûte ou retranche de la ſeconde, comme la prémière eſt à la ſeconde. Si cela n'étoit pas, il ſeroit faux que la ſomme des antécedents fut à la ſomme des conſéquents comme un ſeul antécedent eſt à ſon conſéquent. En effet les ſommes ou les reſtes étant faits de l'addition ou du retranchement de deux grandeurs qui ſont en même raiſon que les deux, prémièrement priſes, par la

Propoſition que je viens de citer, rien n'eſt plus aiſé à voir que la valeur de la raiſon doit demeurer la même. Et c'étoit là ce que je vous diſois, il n'y a pas long tems, qui eſt que ſi l'on ajoûte au conſéquent d'une raiſon une grandeur quelconque, il falloit que l'antécedent qui contient ſon conſéquent ou une de ſes aliquotes une ou pluſieurs fois, ſe trouve augmenté d'une telle maniére qu'à chaque fois que l'on prendra une partie aliquote du conſéquent, devenue plus grande ou plus petite ſuivant que l'on aura changé la valeur de ce conſéquent, on ait ſoin d'augmenter ou de diminuer d'autant de fois la grandeur qui fait la difference de la premiére aliquote à la nouvelle. Vous en devés comprendre beaucoup mieux la raiſon à préſent que je viens de vous demontrer le véritable principe ſur lequel elle eſt fondée. La multiplication & la diviſion ne ſont autre choſe que des raiſons multiples. Le Produit eſt au multiplié comme le multipliant eſt à l'unité: car l'unité & le multipliant ſont pris chacun le même nombre de fois. Ainſi il y a proportion entre le produit, les deux facteurs & l'unité. La Diviſion donne auſſi quatre Grandeurs proportion-

nelles

nelles qui ſont le Dividende, le Diviſeur, le quotient & l'unité.

De là vient que ſi l'on augmente le multiplié, le produit demeurant le même, le multipliant, expoſant de la raiſon, diminue; car ſi ce multiplié eſt pris moins de fois, il faut bien qu'il devienne plus grand pour avoir le même produit. Par contre diminuant le multiplié, & laiſſant le produit le même, le multiplicateur devient plus grand, parce que le multiplié étant plus petit doit être pris plus de fois pour faire la même grandeur. Enfin ſi l'on augmente le produit, le multiplié demeurant le même, il faut que le multipliant ſoit plus grand &c. cela doit s'entendre pareillement de la diviſion, ainſi il ne ſera néceſſaire que de repeter ce que nous venons de dire ſur ce ſujet.

Ce que nous avons vû juſqu'ici doit nous faire comprendre que deux ou pluſieurs raiſons étant égales, & s'exprimant toutes deux par nombres, ou par l'unité & par un nombre, elles ne peuvent être, au moins l'une d'entr'elles, que deux produits des termes expoſants de ces raiſons égales, par un même nombre. Remarqués en paſſant que j'appellerai dans la ſuite ces expoſants, *les racines d'une rai-*

ſon, c'eſt-à-dire les moindres termes qui ſoient entr'eux comme ceux d'une raiſon donnée. Ainſi la Racine de celle-ci 12: 3 c'eſt 4: 1. de 10: 14 qui eſt 5 : 7. En effet dans ces deux nombres on ne ſauroit trouver des unités de même eſpèce qui expriment deux termes plus petits que ceux-ci 4: 1. & 5: 7. Or comme nous avons vû que deux grandeurs multipliées ou diviſées par une même grandeur étoient en même raiſon qu'auparavant, il eſt clair que la racine d'une raiſon qui en eſt elle-même une, compoſée des plus petits termes, peut avoir une infinité de raiſons qui lui ſoient égales, n'y ayant pour cela qu'à augmenter toujours la grandeur ou le nombre par lequel on multipliera les deux termes de cette raiſon là.

Mais pour en revenir à ce que nous voulions prouver, ſuppoſons ces raiſons $\frac{y}{z}$ & $\frac{m}{n}$ la prémière c'eſt la racine de cette eſpèce de raiſon, & l'autre par conſéquent a ſes termes plus grands que ceux de la raiſon $\frac{y}{z}$. Cela étant, j'ôte z de n, le reſte eſt poſitif de même que celui de

de y ôté de m. Ayant donc ôté de m & de n deux termes qui ſont en même raiſon, les reſtes étant $\frac{a}{b}$ ſont encore en même raiſon ; il faut donc que a & b ſoient plus grands que y & z, autrement $\frac{y}{z}$ ne ſeroit pas expoſant. Je fais une ſeconde ſouſtraction qui me donne deux nouveaux reſtes encore en même raiſon ; & comme les deux reſtes ne ſeront jamais plus petits que $\frac{y}{z}$ ils ſeront égaux ou plus grands. Mais ils ne peuvent pas être toujours plus grands, donc ils deviendront enfin égaux à ces deux termes $\frac{y}{z}$. Ainſi on aura une ſouſtraction réiterée de l'une & l'autre grandeur, c'eſt-à-dire une diviſion exacte. Donc toutes les raiſons égales à la racine de cette raiſon, ſont des produits d'une même grandeur par chacun des termes de la racine de cette raiſon, ce qu'il falloit démontrer.

En voilà bien aſſés juſqu'à l'ordinaire prochain, & en attendant, vous avés bien de quoi vous exercer.

NEANDER. C'eſt un travail que je

prends avec trop de plaisir pour ne pas l'appeller un divertissement plûtôt qu'une occupation.

ENTRETIEN XIII.

MATHESIUS.

Dans toute proportion, si l'on change les antécedents en conséquents & les conséquents en antécedents, chacun dans sa raison, ce qui s'appelle invertendo, les quatre grandeurs demeurent encore en proportion. Car 1°. $(a:a)$ le changement du conséquent en antécedent n'empêche pas que les deux termes de chacune des raisons ne soient encore égaux, & qu'il n'y ait toujours une proportion entre ces deux raisons égales. 2°. $(ab:a)$ Si l'on change le conséquent en antécedent, la raison deviendra sousmultiple de multiple qu'elle étoit. Or comme les deux conséquents étoient mêmes aliquotes, chacun de son antécedent, si on les fait venir antécedents, ils seront encore même aliquotes chacun de son conséquent. Ainsi la proportion subsiste après ce changement. 3°. $(a:ab)$ Il est visible qu'ici les rai-

raiſons ſousmultiples ſont changées en multiples ; & la proportion demeurera, puiſque les raiſons ſousmultiples étoient égales ; car on n'a rien changé à la valeur des termes, on les a ſeulement rangé d'une autre maniére, ce qui n'empêche pas que les conſéquents devenus antécedents, ne contiennent leurs aliquotes le même nombre de fois qu'auparavant. 4° (*a*: *b*) Les deux conſéquents ſont diviſés en un même nombre de parties égales, & les deux antécedents en prennent autant des unes que des autres. Il eſt donc bien évident que ſi je change les conſéquents en antécedents & les antécedents en conſéquents, ces derniers ſe trouveront contenir chacun un nombre égal de mêmes aliquotes, & que les antécedents en prendront autant l'un que l'autre : la raiſon change donc ; mais il y a toujours deux raiſons égales, c'eſt-à-dire que la proportion a encore lieu. Cette Propoſition eſt donc univerſelle, que dans toute proportion, ſi l'on fait ce qu'on appelle *invertendo*, les quatre termes ſeront toujours proportionnels, & la raiſon changera dans tous les cas, excepté celui des raiſons d'égalité.

Une proportion étant donnée, les anté-

cedents sont entr'eux comme leurs conséquents, ce qui s'appelle ALTERNANDO *ou* PERMUTANDO, *c'est-à-dire que là où il y a quatre grandeurs proportionnelles, la prémière est à la troisiéme, comme la seconde est à la quatriéme.* 1°. ($a:a$) chaque antécedent c'est le conséquent pris une fois. Les antécedents sont donc entr'eux comme les conséquents : ainsi la prémière grandeur est à la troisiéme, comme la seconde égale à la prémière, est à la quatriéme, égale à la troisiéme. Quelle que soit la raison de la prémière à la troisiéme, la proportion sera toujours dans ces quatre termes, & la même raison repetée deux fois $a:a$ $=a:a.a:a=ac:ac$ alternando $a:ac=a:ac$ &c. 2°. ($ab:a$) par la nature même des raisons multiples, chaque conséquent se trouve multiplié par une même grandeur, savoir l'exposant de l'antecédent à son conséquent; les antécedents sont donc entr'eux en même raison que leurs conséquents. 3°. ($ab:a$) Pour les raisons sousmultiples la même chose a lieu, parce que les antécedents sont multipliés aussi chacun par l'exposant de la raison du conséquent à l'antécedent, qui est la même dans l'une & l'autre raison, donc,

donc, &c. 4°. ($a:b$) Enfin dans les raisons numeriques, les deux conséquents sont d'abord divisés chacun en un même nombre de parties égales: ils sont donc entr'eux comme ces aliquotes, puisque divisés par une même grandeur; or on prend dans les antécedents autant d'aliquotes pour l'un que pour l'autre; elles ont donc un même multiplicateur. Donc la raison des antécedents est égale à celle des deux mêmes aliquotes, & cette seconde est égale à celle des deux conséquents. D'où il s'ensuit que les deux conséquents sont entr'eux comme les antécedents.

Dans toute proportion, le prémier antécedent plus son conséquent est à ce même conséquent, comme le second antécedent plus son conséquent est à ce second conséquent. Ce qui s'appelle COMPONENDO: c'est à-dire que par tout où il y aura une proportion, elle demeurera, si on ajoûte à chacun des antécedents la valeur de son conséquent. 1°. ($a:a$) L'antécedent plus le conséquent, c'est le double du conséquent; ainsi deux fois le conséquent est à son conséquent dans la prémière raison, comme le double du conséquent de la seconde, l'est aussi au sien; car l'un

& l'autre des conſéquents eſt pris deux fois, & les raiſons demeurent égales. 2°. ($ab: a$) Ajoûtant à chaque antécedent 'a valeur de ſon conſéquent, il contiendra ce conſéquent une fois de plus, c'eſt-à dire que les deux raiſons ſeront encore multiples, & que leur expoſant augmentera de l'unité dans l'une & dans l'autre; or elles étoient égales auparavant, elles le ſeront donc encore après cette addition. 3°. ($a: ab$) .Chaque antécedent contiendra ſon conſéquent une fois, & une même partie aliquote de ſon conſéquent, il vaudra donc un nombre de parties aliquotes du conſéquent égal à l'autre; ainſi les raiſons ſeront encore les mêmes. 4°. ($a: b$). Le prémier antécedent eſt compoſé d'autant de mêmes aliquotes de ſon conſéquent, que le ſecond l'eſt du ſien: Ajoûtant donc les deux conſéquents chacun à ſon Antécedent, on aura deux ſommes de mêmes aliquotes qui ſont égales, puiſque les deux conſéquents contiennent un nombre égal de ces mêmes aliquotes dont les antécedents ſont compoſés. On peut auſſi ſe ſervir de cette raiſon générale, c'eſt que les antécedents, comme nous venons de le voir, étant en même raiſon que leurs conſéquents,

quents, si j'ajoûte ceux-ci, chacun à son antécedent, c'est augmenter les deux termes d'une raison de deux autres qui sont en même raison. Donc les sommes seront comme les conséquents, ce qu'il falloit prouver.

En toute proportion le prémier antécedent moins son conséquent est à son conséquent comme le second antécedent moins le second conséquent est à ce conséquent. Et c'est ce qu'on appelle DIVIDENDO. 1°. Dans les raisons d'égalité ceci ne peut avoir lieu, parce que l'antécedent moins le conséquent est zero : or le rien n'est pas à une grandeur comme le rien à une autre grandeur. 2°. Dans les raisons multiples, quand on retranche le conséquent de part & d'autre, chaque antécedent contient son conséquent une fois de moins, ainsi l'égalité des raisons subsiste. 3°. Dans les raisons sousmultiples, comme l'antécedent est plus petit que le conséquent, si l'on veut soustraire le conséquent de l'antécedent, on a pour reste une grandeur négative : & la prémière grandeur négative sera à la positive, comme la troisiéme négative est à la quatriéme positive. Mais ces grandeurs négatives contiendront chacune la grandeur

opposée à une égale qui sera positive le même nombre de fois : la même raison demeure donc, quoiqu'alors les exposants soient négatifs. Enfin 4°. dans les autres raisons, ôtant le conséquent de l'antécedent, on aura une grandeur positive ou négative, & les restes seront en même raison que leurs conséquents, en vertu de cette proposition qui dit que deux Grandeurs demeurent en même raison quoique l'on retranche de l'une & de l'autre, pourvû que ce que l'on retranche de la prémière soit à ce qu'on retranche de la seconde, comme la prémière est à la seconde ; Mais les restes dans ce cas quoiqu'ils soient négatifs, peuvent conserver toujours entr'eux cette même raison : Et quand on compare la raison de deux grandeurs qui ont des signes diférents il n'y a qu'à prendre un quotient positif ; parce que dans une raison on ne fait proprement attention qu'au nombre de fois que l'on doit prendre une grandeur ou une de ses parties aliquotes pour la rendre égale à une autre.

Enfin on appelle CONVERTENDO. *Quand une proportion étant donnée, on change les termes de maniére que l'on ait*

ces quatre autres, ſavoir le prémier antécedent, l'antécedent moins ſon conſéquent; le ſecond antécedent, & le ſecond antécedent moins ſon conſéquent. Il faut démontrer que cette proprieté aura toujours lieu. Les Antécedents ſont entr'eux comme leurs conſéquents; d'où il ſuit que le prémier antécedent moins le prémier conſéquent eſt au ſecond antécedent moins le ſecond conſéquent, comme le prémier eſt au ſecond. Donc enfin le prémier antécedent eſt à cet antécedent moins ſon conſéquent, comme le ſecond antécedent eſt à ce ſecond moins ſon conſéquent. Et c'eſt ce que l'on demandoit. Cette propoſition ne peut avoir lieu non plus dans les raiſons d'égalité. Quand aux raiſons multiples, chaque conſéquent eſt l'antécedent moins le conſéquent; ainſi le conſéquent, c'eſt l'antécedent moins une partie aliquote de l'antécedent; de ſorte que pour faire les deux conſéquents, j'ôte le conſéquent de chacun des antécedents. Mais dans ce cas ici la raiſon diminue conſiderablement, & d'autant plus que le multiple eſt grand: car le nouveau conſéquent approche ſi fort de l'antécedent, qu'il ne s'en manque que la valeur du conſéquent tel qu'il.

qu'il eſt dans la proportion prémiérement priſe. Dans les raiſons ſousmultiples le conſéquent doit être négatif, parce que le conſéquent de la raiſon changée en faiſant *convertendo*, c'eſt l'antécedent moins le conſéquent : or ici le conſéquent eſt plus grand que l'antécedent: c'eſt pourquoi on ôte plus qu'il n'y a, & le reſte ou la diférence eſt une grandeur négative, comme il eſt évident. Pour les raiſons numeriques elles peuvent avoir auſſi un conſéquent négatif, & cela arrive toutes les fois que la raiſon eſt de moindre inégalité.

Voilà ce que l'on appelle la *Syllogiſtique* en fait de proportions, ou plûtôt un certain jargon que l'on démontre ordinairement par lettres, & qui fournit des principes obſcurs à une infinité de perſonnes qui n'y comprennent rien, faute de s'arrêter aux choſes, & de ſe rendre attentifs ſur les idées qu'ils ont déja. Nous ne mettrons pas beaucoup en uſage cette maniére de démontrer ; mais nous tâcherons toujours de faire voir les propoſitions que nous aurons à prouver par des principes tirés de la nature de la choſe même ; & celà d'une maniére auſſi claire & auſſi évidente qu'il nous ſera poſſible.

Je

Je dois avant que de paſſer outre, faire encore quelques remarques ſur ce que je viens de dire. Mais je me contente d'indiquer pour cela quelques exemples qui pourront ſuffire pour le but que je me propoſe.

Les raiſons de — 12 à 24, de 32 à — 8; de — 5 à 7, de 9 à — 8, enfin de — 2 à + 2 ont pour expoſants — 1 : 2. — 4. — 5 : 7. 9 : — 8, & — 1. J'ajoûte à ces termes 32 : — 8 les nombres 40 & 10 & les ſommes 72 & 2 ne ſont pas en même raiſon. C'eſt que l'expoſant eſt — 4, & qu'ajoûtant à ces deux termes des grandeurs qui ſont en même raiſon, la poſitive eſt détruite en partie par la négative; ce qui fait que la proportion ne peut plus avoir lieu. Maintenant ſuppoſons que l'on multiplie par — 2 ces mêmes termes 32 : — 8, on aura — 64 & 16 qui ſont en même raiſon que 32 : — 8 = — 4 car 4 = — 4. Mais vous examinerés tout cela à loiſir, & vous aurés la ſatisfaction de le découvrir par vous-même. C'eſt pourquoi je vais continuer à parler des proportions Géométriques entant que poſitives.

Dans toute Proportion le produit des extrêmes, eſt égal au produit des moyens. 1°. (a : a)

($a:a$) Le prémier antécedent & le second conséquent, sont les facteurs de la prémière multiplication. Le prémier conséquent & le second antécedent sont les facteurs de la seconde multiplication. Or les multipliés & les multipliants sont les mêmes, puisqu'il s'agit de raisons d'égalité. Donc les produits sont égaux, savoir celui des moyens & celui des extrèmes. 2°. ($ab:a$) Les extrèmes sont le prémier antécedent & le second conséquent. Pour avoir le produit des moyens, il faut changer les facteurs. Je fais donc du prémier antécedent le prémier conséquent, c'est-à-dire que je prends une partie aliquote du multiplié; c'est pourquoi laissant subsister le multipliant, j'aurai la même partie aliquote du produit, il faut donc augmenter le second facteur d'autant qu'on avoit diminué le prémier, afin d'avoir le même produit: car la partie aliquote du prémier facteur multipliée par le second fait la même aliquote du produit; & pour avoir le produit entier, on doit prendre cette partie aliquote du prémier facteur multipliée par le second autant de fois que le prémier facteur contient sa partie aliquote. Or c'est précisément ce

que

que l'on fait dans le produit des moyens. On prend une partie aliquote du multiplié, prémier des extrêmes, en prenant le prémier des moyens, & on a dans l'autre moyen le multiple du second facteur de la précedente multiplication, autant multiple de ce facteur que le prémier de sa partie aliquote, puisque les raisons sont égales. Donc le changement arrivé aux facteurs qui sont les deux extrêmes, quand on les a fait devenir moyens, n'a rien changé au produit; & par conséquent dans les raisons multiples, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens. 3°. ($a:ab$) La même chose a lieu dans les raisons sousmultiples, & il est aisé d'en faire l'application ici. 4°. Enfin ($a:b$) remarquons le changement qui doit arriver aux deux extrêmes, facteurs de la prémière multiplication. Je fais du prémier extrême le prémier moyen, c'est-à-dire, que j'ôte ou que j'ajoûte au prémier extrême une ou plusieurs aliquotes. Ainsi le second facteur demeurant le même, le produit se trouve augmenté ou diminué d'autant de mêmes aliquotes de son tout; il faut donc que si j'ai augmenté le prémier facteur de quelques aliquotes, j'ôte

j'ôte du ſecond autant de mêmes aliquotes de ſon Tout, qu'il y en a dans le prémier moyen, c'eſt-à-dire dans le prémier extrême; & qu'au contraire j'en ajoûte le même nombre, ſi j'en avois ôté du prémier extrême, après quoi l'égalité du produit aura lieu. Or c'eſt ce que l'on fait dans les raiſons numériques; car le prémier des extrêmes étant plus grand que le prémier moyen, le ſecond des extrêmes ſera plus petit; & reciproquement, ſi l'un augmente, c'eſt d'une ou de pluſieurs aliquotes, & l'autre diminue préciſément du même nombre de mêmes aliquotes. Donc en général le produit des extrêmes, eſt toujours égal à celui des moyens.

Je vais donner un exemple des raiſons numeriques, ſoit 5 : 7 == 50 : 70. Les extrêmes ſont 5 & 70 & leur produit 350. Le prémier extrême contient 5 parties telles que ſon conſéquent en vaut 7, & le ſecond en contient 7 telles que ſon antécedent, dernier moyen, en vaut 5. les mêmes aliquotes ſont 1. 10. Je fais du prémier extrême le prémier moyen, & le produit augmente de 2 cinquiémes, comme ce facteur a augmenté de deux mêmes aliquotes; ſi je fais le ſecond des moyens

moyens de l'autre extrême, j'ôte 20 de 70, il reste 50 qui multiplié par 7 fait 350 même produit que le précédent: parce que le nouveau multiplié avoit 7 cinquiémes tout comme le dernier des extrêmes; ôtant donc 2 cinquiémes de cet extrême, on aura 2 cinquiémes de moins dans le produit, c'est-à-dire cinq cinquiémes, ce qui fait le même produit.

Une chose à laquelle il faut sur tout bien prendre garde; c'est que quand on veut ajoûter ou retrancher du produit ce qu'il y a de trop, en faisant venir second moyen le dernierdes extrêmes, il faut le diviser en autant de parties aliquotes que le nouveau multiplié prémier des moyens en contient, parce qu'autant qu'on en avoit pris de trop ou de moins dans ce moyen, autant on en ôtera ou on en remettra dans le second des moyens.

J'ai 6: 1 = 60: 10. Je prends 1. à la place de 6 & je diminue ainsi mon produit de 5 sixiémes. En effet 10 n'est que la 6 partie de 60, il faut donc ajoûter 5 sixiémes au produit. C'est ce que je fais en prenant le second des moyens à la place du dernier extrême; car il contient

tient 6 fois le dernier extrême, par conséquent j'ajoûte à ce terme 5 fois sa valeur, & le produit doit augmenter du quintuple : il lui étoit resté une sixiéme & on lui en ajoûte cinq, c'est pourquoi il demeure tel qu'il étoit auparavant.

Vous voyés par là que toutes les raisons d'égalité, multiples & sousmultiples, peuvent étre regardées de la même maniére que les numeriques, dans ce cas ici comme dans plusieurs autres.

Une proportion continue étant donnée, le produit des extrêmes est égal au quarré du moyen.

Toutes les fois que deux produits sont égaux, le prémier multiplié est au second, comme le second multipliant est au prémier, c'est-à-dire qu'il y a proportion entre ces quatre termes. 1°. $ab = ab$, $a:a = b:b$ ou $ab = ba$, $a:b = a:b$. Dans le prémier exemple on auroit pû dire que les deux multipliés sont entr'eux comme les deux multipliants, chacun pris dans son ordre naturel. Mais dans celui-ci a n'est pas à b comme b est à a autrement $aa = bb$, car a peut ne pas être égal à b au quel cas il seroit faux que $aa = bb$. Supposons donc que l'on ait 4 grandeurs inégales comme $ab = cd$, on doit prouver

ver que $a:c = d:b$. 1°. dans les raiſons multiples, le multiplié de *cd* ſavoir *c* eſt une partie aliquote du prémier. Il faut donc que le plus petit multiplié ſoit pris le plus de fois, & que le plus grand ſoit pris le moins de fois. Mais le multiplié *a* a *b* pour multipliant, & tandis que *a* eſt pris une fois, c'eſt comme ſi *c* étoit pris autant de fois que *a* contient de *c*. Donc *b* eſt contenu dans le multipliant *d* autant de fois qu'il y a d'unités dans le produit de l'expoſant de *a* : *c*. Donc encore le nombre de fois que le grand multiplié eſt pris, eſt au nombre de fois que le petit multiplié l'eſt, comme le petit multiplié eſt au grand. 2° la même choſe doit s'entendre pour les raiſons ſous-multiples. Il reſte à voir les numeriques ſur lesquelles je donnerai ſeulement un exemple, parce que ceci a déja été démontré ci-deſſus, & que je me ſuis ſervi, il n'y a qu'un moment des principes ſur lesquels il eſt fondé.

Soit $5 \times 14 = 7 \times 10$, il faut prouver que 5. 7:: 10. 14. je prends 5 parties 14 fois pour prémier produit; ſi je prenois 7 mêmes parties auſſi quatorze fois, j'aurois le produit précedent & deux cinquiémes de ce produit, il faut donc pren-

dre

dre ces 7 parties moins de fois, & pour cela j'ôte de 14 qui eſt le multipliant la valeur de 2 cinquiémes qui eſt 4, car 14 contenant 7 cinquiémes, diviſé par 7 il donne 2 dont le double eſt 4, par conſéquent le reſte eſt dix, & 5 : 7 == 10 : 14. Or 14 doit contenir 7 cinquiémes de 10, comme 7 contient 7 cinquiémes de 5, puiſque les multipliés ſont 5 & 7 & les multiplians 14 & 10, & que par conſéquent le plus petit multiplié a le plus grand multipliant, & le plus grand, le plus petit, comme il eſt évident.

Trois termes d'une proportion Geométrique étant donnés, on peut toujours trouver le quatriéme. Car ce quatriéme, quel qu'il ſoit eſt ou un des extrêmes, ou un des moyens, & par conſéquent dans les trois autres termes les deux extrêmes ſe doivent trouver ou bien les deux moyens, c'eſt-à-dire que l'on a la valeur de l'un & de l'autre de ces produits, puiſqu'ils ſont égaux; c'eſt pourquoi diviſant le produit dont les deux facteurs ſont connus, par le facteur auſſi connu de l'autre produit, le quotient donnera le terme que l'on cherche, ſuivant cette propoſition que *des grandeurs égales diviſées*

par

par une même grandeur donnent des quotients égaux, qui revient à cette autre, qu'un Produit divisé par l'un des facteurs redonne l'autre facteur. De sorte que le terme qui manque, peut être le prémier, ou le second, ou le troisiéme, ou le quatriéme, & dès que l'on connoitra les trois autres, on pourra toujours achever la proportion par la méthode que je viens d'indiquer. Mais pour entrer dans un détail qui fasse appercevoir la chose d'une maniére plus sensible, il faut le démontrer de toutes les espèces de raisons. Ainsi prémièrement (*a : a*) supposons d'abord qu'il manque un terme dans les raisons d'égalité, on en connoit une & un terme de la seconde, il n'y a donc qu'à prendre une grandeur égale à celle qui fait partie de la raison dont on connoit un terme seulement : ce sera celui qui manque ou qui n'étoit pas connu. 2°. (*ab: a*) soit 12. 1 == 60. 5. Je veux trouver 12 & j'ai seulement *. 1:: 60. 5. Je vois que l'antécedent de la prémière raison manque, que l'exposant de celle-ci est 12 & que cette raison est par conséquent multiple. Il faut de même prendre pour antécedent 12 fois le conséquent, c'est-à-dire 12. ainsi 12. 1:: 60. 5. 3°. (*a : ab*) J'ai

J'ai 1 : 3 = 20 : *. Je cherche le quatriéme terme : il faut que comme 3 eſt le triple de 1, de même mon conſéquent ſoit le triple de 20, c'eſt-à-dire que 1 : 3 = 20 : 60. 4°. (*a* : *b*) ſoit 8 : 10 = 12 : 15. chaque antécedent contient 8 fois la dixiéme de ſon conſéquent. Dans la prémière raiſon la choſe eſt manifeſte, & dans la ſeconde ſi l'on diviſe le conſéquent par 10, on a pour quotient 1. & demi, or 8 fois un & demi, c'eſt 8 + 4 = 12. Je ſuppoſe après cela qu'il me manque 15. Je dis, le terme 12 contient 8 dixiémes de mon conſéquent inconnu. Si donc je diviſe ce terme par 8, j'aurai la dixiéme de 15, or 12 contient 8 & il reſte 4 qui eſt la moitié du diviſeur, le quotient eſt donc un & demi, qui multiplié par 10 fait 15.

Connoiſſant deux grandeurs d'une proportion continue, pourvû que ce ne ſoient pas les deux extrêmes, on peut connoitre auſſi le troiſiéme, & par conſéquent toute la proportion. Car dans ces deux grandeurs on a une raiſon & un terme de la ſuivante, & de la même maniére qu'on a connu dans la proportion diſcrete le quatriéme terme de celle dont les trois autres étoient donnés, on achevera auſſi

la

la proportion continue, quand les deux prémières ou les deux derniéres grandeurs feront déterminées. Par exemple ayant 3 & 9 on demande de trouver deux autres termes, & d'en faire une proportion continue : je divise 9 par 3, l'exposant est 3, il faut donc prendre le triple de 9 savoir 27 qui sera le dernier terme. Après quoi on aura 3 : 9 = 9 : 27.

C'est là le fondement de ce qu'on appelle *Règle de trois*, qui est d'un usage fort étendu, & très considérable dans le commerce de la vie civile, aussi-bien que dans toutes les parties des Mathématiques. Nous reduirons à cette même, la prétendue règle de trois inverse, que les Arithméticiens Pratiques distinguent soigneusement de la règle de trois directe, comme si c'étoit deux choses tout-à-fait différentes, quoi qu'au fond cela dépende des mêmes principes, & puisse s'exécuter par la même méthode ; c'est ce qu'il s'agit d'expliquer maintenant.

Pour cet effet nous remarquerons, qu'il y a certaines grandeurs qui augmentent ou diminuent à proportion que d'autres deviennent plus ou moins grandes ; & qu'il y en a par contre qui diminuent

en même raiſon que d'autres augmentent, ou qui augmentent en même raiſon que celles-ci diminuent; ſoit que cela vienne de la nature même des grandeurs que l'on conçoit ne pouvoir pas exiſter enſemble, poſées certaines conditions, ſoit qu'on ſuppoſe ces augmentations ou ces diminutions arbitraires. Il convient de donner des exemples ſur tout ce que nous venons de dire de ces ſortes de grandeurs que nous appellerons dans la ſuite *Proportions directes*, & *Proportions inverſes*, *directement proportionnelles*, *ou réciproquement proportionnelles*. Le prémier que je vais rapporter, c'eſt celui de la peſanteur, & de la quantité de matière. Il n'eſt pas néceſſaire de ſavoir ici, ſi la peſanteur eſt une qualité eſſentielle à la matière, ou ſi elle lui eſt accidentelle, ſi elle pourroit ne pas être proportionnelle à la quantité des corps où elle réſide; c'eſt aſſés que le fait ſoit certain, & quand il ne le ſeroit pas, il ſufit que l'on ait par ce moyen des idées ſenſibles & capables par là-même d'éclaircir notre propoſition générale. J'en dis de même des eſpaces parcourus en tems égaux, comparés avec les viteſſes des mobiles qui les par-
con-

courent; les tems & les espaces parcourus par des mobiles d'une égale vitesse. On en trouve de l'autre sorte dans les tems & les vitesses des mobiles qui parcourent des espaces égaux, dans la longueur & la largeur quand on parle de la même étendue &c.

Toutes les fois qu'il s'agit de faire usage de ces espèces de grandeurs tant directes qu'inverses, c'est-à-dire, de trouver le quatriéme terme d'une proportion dont les trois autres sont donnés; comme ces termes ne sont pas toujours rangés dans un ordre convenable, il faut se demander d'abord quelle est la grandeur que l'on cherche, & à quelle espèce elle appartient. On verra ensuite dans les trois autres termes donnés celui qui est de la même espèce que l'inconnu, & on s'en servira comme d'antécedent de la raison à laquelle on cherche un conséquent. Ensuite pour savoir de quelle maniére il faudra ranger les deux autres termes, il n'y a qu'à se demander à soi même, si la prémière des deux grandeurs connues & homogènes entr'elles augmentant ou diminuant, la grandeur de l'autre espèce; savoir de celle dont un terme est inconnu, doit sem-

blablement augmenter ou diminuer, ou bien ſi c'eſt en raiſon inverſe. Il eſt toujours facile de répondre à cette queſtion, & la moindre attention ſufit pour la reſoudre. Quand donc on s'eſt aſſuré comme cela de la nature de ces grandeurs, on voit ſi l'inconnue doit être plus grande ou plus petite que ſon antécedent, & on range les deux termes de la raiſon connue de façon que le terme qu'on cherche ſoit à ſon antécedent, comme le conſéquent de la prémiére raiſon eſt au ſien; & *invertendo* ou *alternando*, on pourra ranger ces termes de la maniére qu'on le trouvera à propos, puiſque ces changements ne font rien à la nature de la proportion.

On peut reduire ceci à une formule générale. Ayant ces trois termes *a. b. c.* on demande la valeur du quatriéme *x*, tel qu'il y ait une proportion entre ces quatre termes dans un de ces arrangements *a. b. c. x. x. b. c. a* &c. je ſuppoſe que *a. b.* ſoient des grandeurs d'un certain genre, *c* & *x* des grandeurs d'un autre genre. Pour reconnoitre ſi elles ſont directement ou reciproquement proportionnelles; je cherche ſi *a* augmentant, *c* doit augmenter &c. Je dois enfin

fin connoitre que c vient de a & que x vient de b. si c'est une proportion directe $a : b = c : x$. si c'est une proportion inverse $b : a = c : x$. dans l'un & l'autre cas employons les solutions que nous avons données du Problême précédent. Trois termes d'une proportion étant donnés, on cherche le quatriéme &c. On voit par là, qu'il seroit entiérement inutile de faire deux règles diférentes, au lieu d'une générale qui est bonne pour tous les cas sans exception; & qui de plus supposant toujours du bon-sens & du raisonnement, est plus sûre dans l'application que l'on en fait à des exemples & à des Problêmes particuliers.

Les quotients d'une même grandeur divisée par diférents diviseurs sont en raison reciproque des diviseurs; car comme nous l'avons vû auparavant, plus le diviseur est grand & plus le quotient est petit; plus le diviseur est petit, & plus aussi le quotient est grand: le prémier diviseur est donc au second comme le second quotient est au prémier.

Nous avons vû que la multiplication supposoit toujours une proportion entre le produit, les deux facteurs & l'unité; d'où il suit que ces termes étant rangés

de cette maniére, le *produit*, le *multiplié*, le *multipliant*, *l'unité*, invertendo, *le multiplié eſt au produit comme l'unité au multipliant.* Alternando, *le produit eſt au multipliant, comme le multiplié eſt à l'unité.* Or le produit des extrèmes eſt égal au produit des moyens: donc le produit multiplié par l'unité, eſt égal au produit du multiplié par le multipliant, ou du multipliant par le multiplié; & c'eſt une démonſtration diférente de celle que nous avons donnée en parlant de la multiplication d'une maniére générale, qui eſt que l'ordre des facteurs ne change point la valeur des produits. *Componendo, le produit plus le multiplié eſt au multiplié, comme le multipliant plus l'unité eſt à l'unité.* Le produit des extrèmes, c'eſt le produit plus le multiplié, & le produit des moyens, c'eſt celui du multiplié par le multipliant plus l'unité: ſi on ajoûte l'unité au multipliant, on a outre le produit la valeur du multiplié. Et de même on peut faire voir que le multiplié plus l'unité donne avec le multipliant, le produit plus ce multipliant; ce que nous avons auſſi démontré en ſon lieu. *Dividendo, le produit moins le multiplié eſt au multiplié comme le multipliant moins l'unité:*
donc

donc ſi on retranche l'unité du multipliant, on a le produit moins le multiplié, & ſi &c. Convertendo. *Le Produit eſt au produit moins le multiplié comme le multipliant eſt au multipliant moins l'unité.* On peut remarquer la même choſe à l'égard de la diviſion, & dans l'une & l'autre de ces opérations on cherche toujours un quatriéme terme qui ſoit proportionnel aux trois autres donnés; car pour multiplier il faut avoir deux facteurs, & l'unité: on a une raiſon connue, ſavoir le multipliant & l'unité; il faut donc prendre le prémier facteur autant de fois que l'unité eſt dans le multipliant, & le quatriéme ſe trouve être le produit. De même en diviſant, on cherche le quotient, & l'on a une raiſon connue, ſavoir celle du dividende au diviſeur, avec l'unité. Je diviſe donc le dividende multiplié par l'unité produit des extrêmes par le diviſeur, prémier moyen, & le quotient trouvé par là eſt le terme que je cherche. Dans un quarré enfin, l'on a viſiblement une proportion continue, puiſque *le quarré eſt à ſa racine comme ſa racine eſt à l'unité.* Ainſi quoiqu'on ait le quarré, on n'a pas par là même la racine, car les deux moyens ſont égaux,

par conséquent le quarré multiplié par l'unité n'a point de facteur par lequel on puisse le diviser. Autrement si on le connoissoit, il n'y auroit plus de difficulté à trouver la racine, car il faudroit que la racine même fut donnée. C'est pourquoi il faut se servir d'une méthode particuliére que je vous expliquerai dans la suite.

Faisons à présent l'application de nos règles à quelques exemples, pour vous mettre au fait de la maniére en laquelle il faudroit s'y prendre dans des cas plus embarrassants.

1°. Une personne dépense dans une année cinquante pistoles, on demande combien dans 12 années, au cas qu'il continue à faire la même dépense. Les grandeurs homogénes sont d'un côté les pistoles, & de l'autre les années. La grandeur que je cherche, c'est un nombre de pistoles, j'en connois un autre qui est 50, & que je prends pour antécedent de la raison inconnue $50 : x$. Je fais ensuite attention si le nombre des années augmentant, le nombre des pistoles augmente aussi &c. Je vois sans peine que cela doit être ainsi, de sorte que dans ce cas la proportion est directe,

& comme je ſai encore que 50 piſtoles ſont dépenſées dans une année : je rangerai les termes 1. & 12 dans le même ordre que 50: x. ainſi on a 1 : 12 = 50: x: je prends 12 50 fois, ce qui fait 600 valeur du dernier terme, c'eſt-à-dire du nombre de piſtoles que cet homme dépenſera au bout de 12 années dans la ſuppoſition qu'il en dépenſe 50 par année.

2°. Une piéce de drap a 12 aunes de long ſur 3 de large, on demande combien il faut d'aunes de large à une autre piéce de drap qui a 5 aunes de long, pour avoir la même quantité d'Etoffe. Je cherche un nombre d'aunes en largeur, & j'en ai un qui eſt 3, je prends le connu pour antécedent d'une raiſon & le terme inconnu pour ſon conſéquent. Cette raiſon, je veux la faire égale à celle des deux longueurs, dont la prémière eſt 12 & la ſeconde 5. Mais je ne ſais pas encore de quelle maniére je dois ranger ces deux nombres. Pour le connoitre je me demande ſi la longueur augmentant, la largeur augmente auſſi; je vois que non, & que c'eſt précisément tout le contraire, car ſi la largeur augmentoit à meſure que la lon-

gueur augmente, la quantité d'étofe deviendroit plus grande, & il faut qu'elle soit la même. La proportion est donc inverse; mais pour la rendre directe, comme je sai que 12 de longueur ont donné 3 de largeur, je conclus que 5 de longueur donneront une largeur qui surpassera 3 autant que 12 surpasse 5. Le conséquent sera donc plus grand que l'antécedent dans la raison inconnue, précisément d'autant que l'antécedent surpasse le conséquent dans la raison connue, il faut donc changer l'antécedent en conséquent dans cette prémière raison, & laisser le prémier de la raison inconnue, alors la proportion sera directe & conçue de cette maniére 5. 12 :: 3. $\frac{36}{5}$ or $\frac{36}{5}$ donne 7 & une cinquiéme du diviseur, il faudra donc 7 aunes de larges, & une cinquiéme d'aune pour faire avec 5 de long la même quantité d'étofe que 12 de long sur 3 de large: car $5 \times 7 = 35$ & la cinquiéme d'aune en largeur sera prise cinq fois en longueur ce qui fait encore une aune, & par conséquent $36 = 12 \times 3$. Rien n'est plus aisé que de trouver presque sur tous les Auteurs qui traitent ces sortes de matiè-

res

res un grand nombre d'exemples de cette nature, & encore plus d'en proposer soi-même. C'est pourquoi je me dispense d'un plus long examen à ce sujet, & je me contente de vous avertir qu'il faut dans une question distinguer bien soigneusement ce qui est essentiel d'avec ce qui n'est simplement qu'accessoire. On y suppose quelquefois des conditions inutiles, & qui ne servent proprement à rien. Or il est facile sur tout aux commençants de s'y laisser tromper, & de chercher des dificultés là où il n'y en a point. Pour prévenir donc tout cela il convient de faire un juste discernement de ce qui est connu d'avec ce qui ne l'est pas, & de commencer par la recherche du connu, après quoi on verra tout ce qu'il y a de donné & qui peut contribuer à déterminer ou à faciliter la solution du Problème que l'on propose.

Il y a encore quelques règles qui dépendent de la règle de trois telle que nous l'avons expliquée, comme *la règle d'intérêt*, *la règle de change*, & quelques autres où il n'y a qu'à faire quelque légère opération de plus que dans les règles de trois simples. Je vais vous en donner un Echantillon. Supposés qu'une personne

vous ait prété 900 livres, & qu'au bout de 6 ans vous lui rendiés le capital & les intérêts qui montent a 1116 livres, on veut ſavoir à combien pour 100 ou à quel denier les intérèts ſont comptés. Je connois la valeur de la ſomme prêtée & des intérêts de 6 ans; puis je retranche 900 de 1116, & le reſte 216 indique les intérêts de 6 ans. Je fais une règle de trois en diſant, ſi 900 livres donnent 216 dans 6 ans combien 100 livres donneront elles auſſi dans 6 ans, je diviſe le produit 21600 par 900, c'eſt-à-dire 216 par 9, le quotient eſt 24 qui fait connoitre l'intérêt de 6 ans; 4 livres ſont donc l'intérèt d'un an, & par conſéquent la ſomme a été prétée au 4 pour 100.

Mais en voilà aſſés pour les raiſons ſimples, & pour les proportions de nombres entiers. Nous allons traiter de la maniére de comparer les raiſons & de les regarder comme des grandeurs abſolues. C'eſt par là que nous commencerons une nouvelle conférence.

ENTRETIEN XIV.

MATHESIUS.

ON peut encore par la règle de trois diviser une grandeur proportionnellement aux parties données d'une autre grandeur; c'est-à-dire, *connoissant un multinome, le nombre de ses termes, leur valeur, & par conséquent la raison qu'ils ont entr'eux, il s'agit de trouver dans un autre multinome dont la valeur est donnée, le même nombre de termes, qui ayent aussi entr'eux les mêmes raisons que ceux du prémier multinome.* Pour resoudre ce problême, je cherche la raison des deux touts ou des deux multinomes, & je dis que le prémier multinome doit être au second comme le prémier terme de celui-là est au prémier de celui-ci. Le terme inconnu, c'est le prémier du second multinome. Or j'ai trois termes connus, savoir les deux multinomes, & la valeur du prémier terme du multinome; c'est pourquoi divisant le produit fait du second multinome, & du prémier terme connu

connu par le multinome dont je connois la valeur de la prémiere partie ; le quotient donnera le quatriéme terme, prémier du second multinome, que l'on cherchoit & proportionnel aux trois autres. Je fais une seconde règle de trois, & laissant toujours la raison des deux multinomes je prends pour troisiéme terme le second du prémier multinome, & j'ai pour quatriéme terme le second de l'autre multinome. Je prends ainsi successivement pour troisiémes termes les autres du prémier multinome jusqu'au dernier ; & les quatriémes termes trouvés par ces opérations sont ceux du second multinome qui correspondent aux prémiers.

Après cela le prémier terme connu sera à celui qu'on a trouvé prémièrement, comme les deux seconds, les deux troisiémes &c. Car toutes ces raisons sont égales à celles des deux multinomes, elles sont donc égales entr'elles. De plus le *prémier terme sera au second dans le prémier multinome, comme le prémier est au second dans l'autre* en faisant alternando, & il est aisé de voir jusqu'où l'on peut pousser ces proportions. La somme de ces quatriémes termes resultante d'autant de règles

gles de trois qu'il y a de termes dans le prémier multinome, & par conséquent dans le second, la somme dis-je, de tous ces termes est égale au second multinome, & ces termes ont la même raison entr'eux que ceux du prémier pris de la même maniére. Car 1°. puisque cette somme des quatriémes termes, c'est tout autant de quotients du second multinome multiplié par chaque terme du prémier & divisé par le prémier, il est clair que la somme de ces quotients sera la même que celle du produit des deux multinomes divisé par le prémier, c'est-à-dire, la même que le second multinome. En effet le second multinome étant multiplié par chaque terme du second, c'est le produit des deux multinomes, & comme à chaque fois qu'on l'a multiplié par un terme du second, on le divise par le prémier, on a cherché combien de fois le prémier multinome se trouvoit dans la somme de tous ces produits partiaux qui sont, comme nous venons de le voir, le produit des deux multinomes; il est donc démontré que la somme de ces quatriémes termes vaut le second multinome 2°. Les termes ainsi trouvés, ont entr'eux la même raison

que

que les termes du prémier multinome pris dans le même ordre, parce que la raiſon des deux multinomes étant égale à celle de deux mêmes termes de chacun de ces multinomes; on ne ſauroit trouver, comme il eſt aiſé de le voir, une raiſon entre deux termes conſécutifs d'un multinome, qui ne ſe trouve auſſi entre deux termes de l'autre multinome pris de la même maniére. Il ne ſera pas difficile de ſe rappeller le principe de cette démonſtration que nous avons déja établi. Ainſi on a ſatisfait à la queſtion & le problême eſt réſolu par cette méthode. C'eſt auſſi la démonſtration de ce qu'on appelle communément *règle de compagnie*, qui a lieu principalement, lors que pluſieurs Marchands ſe ſont aſſociés, & qu'ils contribuent chacun plus ou moins à un fond commun, & venant enſuite à faire un certain gain ſur ce fond, il s'agit de le partager entr'eux ſuivant la contribution de chaque aſſocié, en ſorte que celui qui a mis le plus, retire auſſi davantage à proportion, & ainſi des autres. Dans de pareils cas on voit que le prémier multinome, c'eſt la ſomme des contributions dont on connoit la valeur, le nombre des termes

qui

qui font les contributions particuliéres, & la raifon que ces termes ont entr'eux. Le gain total eft le fecond multinome dont les termes font inconnus, & comme il n'y a aucun des affociés qui n'ait mis quelque chofe, chacun d'eux auffi doit avoir fa part du gain, c'eft-à-dire que le fecond multinome doit avoir autant de termes que le prémier, & que tous enfin devant avoir à proportion de ce qu'ils ont mis; les gains partiaux doivent être entr'eux comme les contributions particuliéres, afin que perfonne ne gagne ou ne perde dans le partage qu'on fait.

Cette règle, comme il eft aifé de le voir, n'eft pas dans le fond différente de la règle de trois, mais à caufe qu'on en fait plufieurs confécutives, & que c'en eft une application particuliére; bien des gens la regardent comme d'une nature tout-à-fait diférente: quoique néanmoins il foit certain que celui qui connoit, & a une idée très exacte de la nature des proportions, pourra fans autre fecours que celui de l'attention, venir à bout de refoudre tous les problèmes qu'on pourroit lui propofer fur ce fujet. Et c'eft ce que vous devés avoir compris

par

par la démonſtration générale dont je me ſuis ſervi à cette occaſion.

On a encore une autre règle qui s'explique à peu près de la même façon. C'eſt celle qui conſiſte à trouver la valeur d'un multinome dont on connoit la ſomme totale & la raiſon que les termes ont entr'eux. Pour expliquer cette méthode, je dis que puis qu'on a la ſomme des termes d'un multinome avec la raiſon de ſes termes : il eſt clair qu'on ne peut pas trouver pluſieurs termes diférents qui puiſſent ſatisfaire à la queſtion, & qu'ainſi le cas eſt tout-à-fait déterminé. Cela étant, il n'y a qu'à prendre autant de grandeurs connues qu'il y a de termes dans le multinome donné, & qui ayent entr'elles les mêmes raiſons que les termes inconnus de ce multinome. Après quoi opérant de la même maniére que dans la règle de compagnie, je trouve ſucceſſivement la valeur des termes que je cherche.

La diférence qu'il y a entre ces deux règles & dont la derniére, ſavoir celle que je viens d'expliquer, s'appelle *règle de fauſſe poſition* par la raiſon que nous allons voir tout-à-l'heure; cette diférence, dis-je, conſiſte en ce que dans la règle

règle de compagnie, on a deux multinomes donnés avec le nombre des termes & la raiſon qu'ils ont entr'eux, au lieu qu'ici on n'a qu'un multinome, le nombre des termes & leurs raiſons. Voilà pourquoi on eſt obligé de faire une fauſſe poſition, c'eſt-à-dire, ſuppoſer un nombre ou un multinome qui ait les conditions requiſes. Ainſi cela revient à peu près au même, parce que connoiſſant la raiſon que doivent avoir entr'eux les termes inconnus du multinome donné, on peut en prenant un multinome ſemblable connoitre de cette maniére chaque terme du multinome propoſé: on voit auſſi par-là l'utilité de cette règle, puiſque l'on n'a qu'à choiſir à diſcretion quel nombre que l'on voudra, pourvû qu'il ait les conditions du problême. Ce qui pour l'ordinaire eſt facile, car il n'y a qu'à prendre les plus petits nombres, par où l'on diminue de beaucoup la peine du calcul. Que ſi par hazard on venoit à prendre les parties qu'il faut, & cela ſans le ſavoir, on verra que la ſomme de toutes ces parties eſt préciſément égale au multinome donné, auquel cas la queſtion eſt déja reſolue. Mais la ſomme étant plus grande ou plus

petite,

pre à conduire à la découverte des véritables fondemens des propriétés que l'on y remarque ; & c'est aussi un avantage que je ne négligerai point. J'ai encore à vous parler des raisons composées, des progressions Géométriques, & de la progression numerique en particulier, à l'occasion de laquelle j'indiquerai la maniére d'opérer sur les chifres dans les quatre règles d'addition, multiplication, soustraction & division, tant en nombres entiers qu'en fractions, aussi bien que la méthode d'extraire les racines quarrées, cubiques &c. C'est par-là que j'ai dessein de finir, à moins que peut-être je n'ajoûte quelques problèmes d'Analyse qui se tirent de la nature des équations, & que je tâcherai de vous expliquer d'une maniére claire & facile.

Neander. J'étois aussi bien surpris de ne vous entendre parler, ni de règles sur les chifres, ni de fractions, ni d'autres choses qui ont de coûtume de préceder presque tout ce que vous avés dit jusqu'ici. Quand à ce que vous avés démontré sur les raisons & proportions Géométriques, cela me paroit très bon. Mais il y a pourtant certaines choses sur les quelles

quelles il me reste quelques difficultés que je serois bien aise de vous proposer.

MATHESIUS. Nous verrons cela les jours que nous destinons à repasser ce que nous avons fait. Et comme il nous reste du tems, je vais commencer une nouvelle matière avant que de finir.

Dans tout ce que nous avons dit jusqu'ici sur les raisons Géométriques, nous avons supposé, comme je viens de le dire, qu'elles s'exprimoient par le moyen de l'unité, ou par des nombres entiers, & qu'une proportion composée des deux raisons numeriques, avoit toujours quatre nombres pour ses termes. Mais il se peut, & il arrive même très souvent que l'on est obligé de subdiviser les grandeurs que l'on avoit d'abord regardées comme unités, & de les considerer pour ainsi dire, quelquefois sous deux égards: savoir comme nombres & comme unités; c'est ce qui a lieu dans la division inexacte, lors qu'après avoir vû combien de fois le diviseur doit être pris pour égaler son dividende, on voit qu'il y est une ou plusieurs fois avec un reste; alors il faut nécessairement regarder les unités du diviseur comme des grandeurs numeriques, & concevoir que le reste contient autant d'uni-

d'unités du diviſeur qu'il en contient dans ſa valeur : c'eſt à dire, que chaque unité du reſte doit être diviſée en autant d'unités que le diviſeur, & chaque unité du diviſeur en autant de parties que le reſte, comme ſi l'on avoit à diviſer 24 par 5, le quotient eſt 4 & il reſte $\frac{4}{5}$ dans lequel reſte, l'unité de 4 eſt diviſée en cinq parties égales, ce qui fait 4 cinquiémes, & l'unité de 5 eſt diviſée en 4 parties ; ce qui fait par contre 5 quatriémes. On voit de plus, que l'unité eſt ici commune meſure, puiſque priſe 4 fois elle fait le reſte, & 5 fois elle donne le diviſeur. Vous devés comprendre par là qu'une fraction eſt toujours une raiſon de moindre inégalité. On lui donne ce nom, parce dit-on, qu'elle exprime la raiſon d'une partie à ſon Tout, au lieu que les autres, ſavoir les multiples, expriment la raiſon du tout à la partie. Car l'expoſant d'une raiſon de moindre inégalité qui peut être ou numerique ou ſousmultiple eſt toujours moindre que l'unité, ou il contient un nombre entier, avec un reſte plus petit que l'unité. La raiſon de moindre inégalité, conſiſte à diviſer un tout, en un certain nombre de parties, & à ne les prendre pas toutes. Or ce

tout

tout peut être regardé comme faiſant partie d'un autre aſſemblage, c'eſt-à-dire, comme unité par rapport à un autre nombre. Quand je dis, par exemple, que j'ai pris une grandeur ſix fois, il n'eſt pas néceſſaire que je détermine ſes parties, & ainſi je la regarde comme unité. Mais quand on la prend pluſieurs fois, & outre cela quelque choſe de plus, il faut alors déterminer ſa valeur, & celle de ce qu'on a pris, en trouvant une commune meſure de l'une & de l'autre de ces deux grandeurs, ſavoir de la partie & du tout. C'eſt là l'uſage des fractions & l'origine du nom qu'elles portent qui ſemble indiquer une rupture de quelque unité, ou de quelque grandeur conſiderée auparavant comme unité.

Mais pour en revenir à la diviſion; ſi le dividende eſt un nombre, & le diviſeur l'unité, il ne peut y avoir de reſte, à cauſe que l'unité étant priſe autant de fois qu'il le faut, ne peut qu'égaler ſon tout. Quand on diviſe deux nombres, on les ſuppoſe tous deux de même eſpèce au moins entant qu'on les diviſe, & quoi qu'on les ait conſideré comme des grandeurs hétérogènes en les prenant ſéparément. Or comme il n'arrive pas toujours

que

que l'un de ces nombres ſoit multiple de l'autre, quand cela a lieu la diviſion eſt inexacte, comme on l'a déja dit, & les nombres étant des raiſons multiples, il faut comparer ces raiſons entr'elles.

Deux raiſons qui ont un même conſéquent, ſont entr'elles comme les antécedents; car ſi les antécedents ſont égaux, on voit que le conſéquent a été pris autant de fois pour faire l'un que pour faire l'autre; s'ils ſont inégaux, qu'il a été pris plus de fois dans l'un que dans l'autre. Le prémier eſt multiple du ſecond, c'eſt que le conſéquent a été pris dans l'antécedent, partie aliquote du prémier, un nombre qui ſe trouve pluſieurs fois dans celui qui indique combien de conſéquents il y a dans l'antécedent multiple. Et enfin les antécedents étant en raiſon numerique, il eſt viſible que le conſéquent a été pris un nombre de fois dans le prémier, & un autre nombre de fois dans le ſecond. Il eſt clair encore que les nombres ſont les expoſants de leur raiſon avec l'unité, & de là je conclus que deux raiſons qui ont un même conſéquent ſont entr'elles comme leurs antécedents, quel que puiſſe être ce conſéquent. Par exemple ſoit le conſéquent commun $2\frac{1}{2}$ pris 5 fois dans la prémière raiſon, & 4 fois dans la ſe-

conde, les antécedents $12\frac{1}{2}$ & 10 feront entr'eux comme les raifons $12\frac{1}{2}$: $2\frac{1}{2}$ & 10: $2\frac{1}{2}$ dont les expofants font 5 & 4. Ainfi la raifon d'un nombre à l'unité eft à la raifon d'un autre nombre à l'unité comme ces deux nombres font entr'eux.

Quand je fais une fraction d'une grandeur regardée auparavant comme unité, je diminue cette grandeur, je la divife en un certain nombre de parties égales, & j'en prends une ou plufieurs, mais pourtant en moindre quantité que le tout n'en contient. Si je divife donc deux nombres, il eft évident que chaque unité du dividende doit être égale à chaque unité du nombre par lequel on divife. Mais plus il y a d'unités au divifeur, & moins de fois le retranchement fe fait, puifqu'il eft plus grand; comme fi je divifois 12: 1. 12 contient l'unité douze fois; j'augmente le divifeur de l'unité, c'eft-à-dire, je le fais double de ce qu'il étoit auparavant, & le retranchement ne fe fait qu'une fois là où il fe feroit fait deux fois; ainfi le quotient n'eft plus que la moitié de ce qu'il étoit auparavant: j'ai 12: 3, & le retranchement fe fait une fois tandis qu'il fe faifoit 3 fois quand on avoit 12: 1; il en eft de même

des

des autres diviſeurs, 4, 5, 6 &c. Mais quand on veut comparer deux quotients d'une même grandeur diviſée par différents diviſeurs comme 12: 3 = 4 & 12: 4 = 3, il n'y a qu'à prendre la raiſon inverſe des diviſeurs comme nous l'avons vû auparavant, qui eſt dans ce cas celle de 4 à 3, au lieu que les diviſeurs étoient entr'eux comme 3: 4, & ceci peut s'appliquer aiſément à tous les autres cas.

Ces deux nombres 12: 2 = 6 & 12: 6 = 2 marquent que la moitié de 12 eſt 6, & que ſa ſixiéme partie eſt 2. En effet puiſque 12 contient 2 ſix fois, il faut que ſix ſoit un nombre qui puiſſe être pris 2 fois. Je prends la moitié de l'unité, je l'ajoûte au dividende 12 & mon diviſeur 2 contient 4 moitiés d'unités. Je cherche combien 13 moitiés valent de fois 4 moitiés; le conſéquent eſt le même, l'unité eſt une moitié de la précédente; mais ce conſéquent je ne le regarde pourtant pas comme unité abſolue: car quand j'ai trouvé pour quotient 13 qui vaut 3 unités de la prémière eſpèce & le quart de cette unité, celle-ci, ſavoir de la ſeconde eſpèce, doit être reduite à la prémière, 13 moitiés ſont à quatre moitiés comme 13 entiers ſont à 4 entiers, puiſque les aliquotes ſont priſes de la même maniére. J'ai une raiſon 12:

5, & je veux donner à 7 un conſéquent qui faſſe avec lui la même raiſon que 5 avec 12. Je vois que 12 contient 12 fois la cinquiéme de ſon conſéquent, il faut de même que 7 contienne douze fois la cinquiéme du ſien. Diviſant donc 7 en douze parties égales, j'aurai la cinquiéme du conſéquent ſavoir 7 douziémes, & le conſéquent ſera cinq fois 7 douziémes, c'eſt-à-dire 35 douziémes de l'unité de même eſpèce que celles qui compoſent la raiſon 12: 5. la proportion ſera donc $12:5 = 7:\frac{35}{12}$. Je fais tout en douziémes $\frac{144}{12}$ ſont à $\frac{60}{12}$ comme $\frac{84}{12}$ à $\frac{35}{12}$ & c'eſt la même choſe que ſi j'avois dit $\frac{12}{1}:\frac{5}{1} = \frac{7}{1}:\frac{35}{12}$.

Une proportion compoſée de quatre nombres entiers a pourtant quatre raiſons, puiſque chaque nombre eſt une raiſon multiple de l'unité. Ainſi on a $\frac{a}{1}:\frac{b}{1} = \frac{c}{1} = \frac{d}{1}$. Mais parce que l'on compare ces raiſons entr'elles comme des grandeurs abſolues, elles ſont comme les antécedents, dès que le conſéquent eſt le même dans toutes; il eſt clair qu'on ne les regarde plus comme raiſons, & c'eſt ce que l'on fait, quand on ajoûte, multiplie, ſouſtrait, & diviſe les nombres les uns par les autres. C'eſt ce qui eſt facile quand il ne s'agit que

que des raifons multiples. Mais nous allons indiquer la maniére d'opérer fur toutes les efpèces de raifons Géométriques. Ce qui eft très curieux, de même que d'une grande utilité dans les Mathématiques.

La prémière chofe qu'il faut faire ici, c'eft de trouver l'art de reduire toutes les raifons que l'on pourra donner au même conféquent, quand ils en ont des diférents. Comme par exemple on dit qu'un tout a été pris plufieurs fois, que d'un fecond on en a pris une partie aliquote, d'un troifiéme plufieurs aliquotes, d'un quatriéme un autre nombre de parties mêmes ou diférentes aliquotes de ces touts; il faut faire en forte que chacun d'eux foit divifé en un même nombre de parties, afin qu'on puiffe voir par le plus ou par le moins qu'on aura pris dans chaque raifon, ce que font ces raifons les unes par rapport aux autres, & les regarder enfuite comme des grandeurs abfolues.

Pour cela je fuppofe que toutes ces raifons s'expriment par deux termes feulement, favoir par deux nombres ou par l'unité & un nombre, ou par l'unité prife une fois dans chaque terme, & enfuite que toutes ces unités font de même efpèce. Après quoi j'exprime mes raifons, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{9}{12}$ &c. Je prends pour conféquent

commun de toutes ces raifons le produit continu de tous les conféquents de chacune de ces raifons : enfuite je multiplie chaque antécedent par le produit des conféquents moins celui de la raifon fur laquelle j'opère, & chacun de ces produits fera l'antécedent de cette raifon, ayants tous un même conféquent. Les termes de chaque raifon feront augmentés de cette maniére de beaucoup, mais la raifon fera la même, car le produit de tous les conféquents, c'eft le conféquent de la raifon donnée multipliée par le produit continu de tous les autres qui font donnés, & l'antécedent fera auffi multiplié par le même produit. Donc ces deux termes feront en même raifon qu'auparavant, & comme l'on fera la même chofe dans chaque raifon, il n'y en aura point non plus qui ne conferve fa valeur. Enfin le conféquent fera commun comme il eft évident. Par exemple fi l'on a $\frac{1}{1}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{7}{1}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{3}$ le produit des conféquents eft 72 & les raifons fe trouvent reduites à celles-ci $\frac{72}{72}$. $\frac{24}{72}$ $\frac{504}{72}$ $\frac{54}{72}$ $\frac{56}{72}$. Si l'on avoit divifé le conféquent de cette raifon $\frac{1}{1}$ on en auroit pris 72, le conféquent 6 étant partagé en 72 parties, on auroit pris 2 fois la fixiéme de 72 qui eft 12 favoir $\frac{24}{72}$. Le conféquent 1 étant divi-

sé en 72 parties on auroit pris 7 fois ces 72 parties. Le conséquent 4 étant divisé en 72 parties, on auroit pris 3 fois le quart de 72 savoir 18 qui donnent $\frac{54}{72}$ & le conséquent 3 divisé en 72 parties, il auroit fallu prendre quatre fois le tiers de 72 qui est 24, & pris 4 fois, c'est 96 $\frac{96}{72}$. Mais il n'est pas arbitraire de donner un conséquent commun à plusieurs raisons, au moins si l'on veut éviter les fractions, car ici on a trouvé 72 divisible exactement par chacun des conséquents, à cause que c'est le produit continu de tous les conséquents, & qu'un nombre de plusieurs dimensions divisé par un de ses facteurs, donne pour quotient le produit des autres facteurs.

Si j'avois pris au hazard 60 pour conséquent commun, il auroit encore réussi, parce qu'il est divisible par les nombres 6. 4. 3. & par l'unité qui sont les conséquents des raisons proposées; on auroit eu alors $\frac{60}{60}$ $\frac{20}{60}$ $\frac{420}{60}$ $\frac{45}{60}$ $\frac{80}{60}$ raisons égales à celles que nous avons reduites au conséquent 72. Il en sera de même de tout autre nombre semblable. Mais si l'on prend 21 par exemple pour conséquent commun, on aura $\frac{21}{21}$ & 21 divisé par 6 dont la division est inexacte &c. Or comme

on ne se sert de cette méthode que pour faciliter le calcul des raisons, cette maniére de prendre au hazard un dénominateur commun seroit très embarrassante & donneroit plus de difficulté que de secours, au lieu que par la méthode que j'ai indiquée, on est toujours sûr de trouver des nombres entiers. On peut réfléchir plus particuliérement sur les raisons pour lesquelles cela arrive ainsi. Mais il faut toujours mettre en usage dans la pratique les voyes les plus abrégées & les plus commodes, & ce n'est pas, sans contredit, celles du raisonnement qui au contraire sont difficiles à comprendre & mal aisées à suivre. Je vous ferai remarquer la diférence de ces deux méthodes; soit $\frac{12}{8}$ & $\frac{5}{4}$ je veux reduire ces raisons au même conséquent, & comme nous l'avons enseigné elles se reduisent à celles-ci $\frac{48}{32}$ & $\frac{40}{32}$. par le raisonnement, je dis, quand je prends un quart j'ai le double d'une huitiéme ainsi $\frac{5}{4}$ c'est 10 huitiémes, & $\frac{10}{8}$ sont à $\frac{12}{8}$ comme 10 : 12, comme 40 est à 48. Cet exemple est facile, mais il se trouve des cas plus embarrassants, comme $\frac{7}{5}$ & $\frac{9}{13}$ la raison de 7 à 9 & celle de 5 à 13 ne sont pas aisées à déterminer. En général je vois qu'une treisiéme est plus petite qu'une cinquiéme

&

& que par conſéquent il faut prendre $\frac{1}{13}$ plus de fois que $\frac{1}{5}$ pour faire la même raiſon. Or pris le même nombre de fois comme 7 fois par exemple, on a $\frac{7}{13} : \frac{7}{5} = \frac{1}{13} : \frac{1}{5}$ & $\frac{1}{13} : \frac{1}{5} = 5 : 13$ c'eſt-à-dire que la treiziéme partie d'un tout eſt à la cinquiéme partie de ce tout comme 5 eſt à 13, & non pas comme 13 eſt à 5, ce qui eſt évident. Or ici on prend 2 treiziémes de plus que l'on ne prend de cinquiémes: mais il eſt dificile de déterminer ces rapports, & il en faut venir à l'opération qui eſt de diviſer chaque conſéquent en 65 parties, d'en prendre 7 fois la cinquiéme partie qui eſt 13, ce qui fait $\frac{91}{65}$ & pour l'autre $\frac{45}{65}$. Ainſi les deux raiſons ſont entr'elles comme 91 : 45.

Ajoûter des raiſons les unes aux autres, c'eſt concevoir qu'un tout ou une de ſes aliquotes a été pris une ou pluſieurs fois, que ce même tout ou une de ſes aliquotes a été pris encore une ou pluſieurs fois, & ainſi ſucceſſivement, enſorte que l'on veut ſavoir le rapport que la ſomme de toutes ces priſes a avec cette grandeur entiére que l'on a priſe pluſieurs fois en tout ou en partie. Comme ſi par exemple je voulois ſavoir combien on a pris de toiſes & de parties de toiſes, lorſqu'on en a eu

une fois trois quarts, une autre fois la troisiéme partie, une autre fois encore 4 cinquiémes &c. On peut ajoûter des nombres entiers à d'autres raisons, en mettant l'unité au dessous pour conséquent $\frac{a}{1}$ & les reduisant comme les autres à un même conséquent, ou ce qui revient au même, on multiplie le nombre donné par celui qui indique les parties du conséquent de la raison à laquelle on veut ajoûter ce nombre, & le produit qui marque combien de fois le nombre donné contient le conséquent de cette raison, ajoûté à l'antécedent donnera la somme de la raison & du nombre. Comme si on avoit à ajoûter 5 aunes & trois quarts d'aune, il faut multiplier 5 par 4 & 5 contient 20 quarts d'aune, lesquels ajoûtés aux trois quarts prémierement pris font $\frac{23}{4}$ c'est-à-dire, que prenant cinq aunes & trois quarts, on prend 23 fois la quatriéme partie de l'aune. On retranche des raisons les unes des autres, lorsque deux prises d'une grandeur étant données, on cherche si elles sont égales ou inégales, quelle est la plus grande ou la plus petite, aussi bien que la raison du reste avec le tout.

La soustraction des raisons se fait ainsi; on reduit les raisons au même conséquent, quel-

quelques que puiſſent être ces raiſons, & l'on retranche l'antécedent de la ſeconde de l'antécedent de la prémière, le reſte eſt une raiſon qui a le même conſéquent que les deux raiſons qui ont ſervi à cette opération; & cet antécedent ajoûté à celui de la ſeconde raiſon redonne le prémier, ce qui eſt une preuve que l'on a bien opéré.

Que ſi au lieu de reduire les entiers & fractions en une ſeule fraction, ou d'exprimer les nombres comme des raiſons, on veut ſouſtraire, par exemple $6 + \frac{3}{4}$ de $8 + \frac{2}{3}$ il faut alors commencer par les fractions, & les reduire au même conſéquent, ce qui donne ici $\frac{3}{4}$ & $\frac{2}{3}$ $\frac{9 \& 8}{12}$ il ſe trouve que $\frac{3}{4}$ vaut une douziéme plus que $\frac{2}{3}$, & qu'ainſi on ne peut pas ôter $\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{3}$. Mais on peut mettre $\frac{-1}{12}$ & ôtant après cela 6 de 8, il reſte deux, le reſte total eſt donc 2 moins une douziéme, c'eſt-à-dire l'unité & $\frac{11}{12}$ ou bien l'on peut encore ôter de 8 l'unité qui vaut $\frac{12}{12}$ & joindre $\frac{8}{12}$ à $\frac{12}{12}$ c'eſt-à-dire $\frac{20}{12}$ deſquelles ôtant 9 douziémes, il en reſte 11, & comme on a emprunté l'unité de 8, il ne reſte que 7, donc ôtant 6 on a l'unité & $\frac{11}{12}$ comme auparavant.

Ce

Ce ſont là de petites difficultés qui ne laiſſent pas que d'embarraſſer quelques fois, ſur tout ceux qui ſont élevés dans le jargon de l'Arithmétique, & à qui il faut de toute néceſſité une nouvelle règle pour les tirer d'affaire. Mon deſſein n'eſt pas, comme vous le ſavés, de m'arrêter beaucoup à la pratique, parce qu'elle ſe trouve déja ſufiſamment expliquée preſque dans tous les Auteurs qui traitent ces ſortes de matières. Nous parlerons après ceci des raiſons composées qui ont lieu dans la multiplication & la diviſion des raiſons de toute eſpèce, & ſur lesquelles il nous reſte à dire des choſes très importantes.

Fin du Prémier Tome.

